

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Егорова Галина Викторовна  
Должность: Проректор по учебной работе  
Дата подписания: 28.09.2023 11:27:38  
Уникальный программный ключ:  
4963a4167398d8232817460cf5a76d186dd7c25

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»  
(ГГТУ)**

**УТВЕРЖДАЮ  
проректор**



**26 июня 2023г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.07.04**

**Теория функций действительного переменного**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.01 Педагогическое образование</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2023 г.**

## 1. Пояснительная записка

Предметом изучения в рамках настоящего курса являются основные понятия и методы теории функций действительного переменного. В учебном курсе «Теория функций действительного переменного» продолжается изучение таких фундаментальных понятий математики как множество и функция. При этом осуществляется обобщение ряда понятий и методов классического математического анализа и на этой основе создаются новые оригинальные конструкции и методы исследования.

Идеи и методы теории функций действительного переменного позволяют с единых позиций подходить к решению задач из разных разделов математики и физики. Знание теории функций действительного переменного является необходимым элементом математического образования современного студента- педагога.

Рабочая программа дисциплины составлена на основе учебного плана 44.03.01 Педагогическое образование по профилю Математика 2023 года начала подготовки.

При реализации образовательной программы университет вправе применять дистанционные образовательные технологии.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

### 2.1 Цели дисциплины

Целью учебной дисциплины «Теория функций действительного переменного» является формирование у студентов компетенций, необходимых для осуществления профессиональной деятельности в области преподавания математики в образовательных учреждениях разного типа в соответствии с требованиями образовательных стандартов.

### 2.2. Задачи дисциплины

закключаются в формировании у студентов комплекса знаний, умений и навыков по теории множеств (бесконечные множества, мощность множества), абстрактным пространствам и их структуре, теории меры и интеграла Лебега, необходимых для эффективного решения профессиональных задач, связанных с обучением математике в школе и вузе.

### 2.3 Знания и умения обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

<b>В результате изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного»» студент должен обладать следующими компетенциями:</b>	<b>Коды формируемых компетенций</b>
<b>Профессиональные компетенции (ПК)</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.	<b>ПК-1</b>

### Индикаторы достижения компетенций

Код и наименование профессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции
<b>ПК-1.</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	<b>ПК-1.1.</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).

### 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» относится к обязательной части учебного плана (Б1.О. 07.04).

Программа курса предполагает наличие у студентов знаний по дисциплинам: «Алгебра», «Математический анализ», «Геометрия».

Дисциплины, для изучения которых необходимы знания данного курса:

«Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальные уравнения», некоторые дисциплины по выбору студента.

#### 4.1. Структура и содержание дисциплины (модуля).

Очная форма обучения

№ п/п	Раздел/тема	Семестр	Всего час.	Виды учебных занятий				Промежуточная аттестация
				Контактная работа (ауд.)			СРС	
				Лекции	ЛЗ	ПЗ		
	<b><i>Раздел 1. Элементы теории множеств</i></b>	<b>5</b>	<b>36</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>12</b>	<b>18</b>	
1.	Тема 1. Мощность множества. Счетные множества.	5	20	4	-	6	10	
2.	Тема 2. Мощность континуума. Сравнение мощностей	5	16	2	-	6	8	
	<b><i>Раздел 2. Метрические пространства</i></b>	<b>5</b>	<b>40</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>14</b>	<b>20</b>	

3.	Тема 3. Понятие метрического пространства	5	24	4	-	8	12	
4.	Тема 4. Полные метрические пространства	5	16	2	-	6	8	
	<b>Раздел 3. Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега</b>	<b>5</b>	<b>30</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>10</b>	<b>14</b>	
6.	Тема 5. Структура множеств на числовой прямой	5	12	2	-	4	6	
7.	Тема 6. Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега	5	18	4	-	6	8	
	<b>Промежуточная аттестация– экзамен</b>		<b>36</b>					<b>36</b>
	<b>Итого</b>		<b>144</b>	<b>18</b>	<b>-</b>	<b>36</b>	<b>54</b>	<b>36</b>

#### 4.2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

##### Лекции

##### *Раздел 1. Элементы теории множеств*

##### **Тема 1. Мощность множества. Счетные множества**

Понятие множества. Операции над множествами. Отображение множеств. Взаимно однозначное соответствие между множествами. Разбиение на классы. Эквивалентность множеств. Конечные и бесконечные множества. Понятие мощности множества. Счетные множества (определение и примеры). Характеристический признак счетности множества. Существование счетного подмножества бесконечного множества. Мощность подмножества счетного множества. Теоремы о мощности объединения разных множеств (конечного и счетного; не более чем счетной совокупности счетных множеств; конечного числа счетных множеств; счетной совокупности конечных множеств; счетной совокупности счетных множеств). Счетность множества рациональных чисел. Теоремы о мощности объединения бесконечного и не более чем счетного множеств; о мощности разности несчетного и не более чем счетного множеств.

##### **Тема 2. Мощность континуума. Сравнение мощностей**

Несчетность множества всех точек отрезка  $[0, 1]$ . Понятие мощности континуума. Теоремы о мощности объединения: конечного числа множеств мощности континуума; счетной совокупности множеств мощности континуума и их следствия.

Сравнение мощностей. Аксиома выбора. Континуум-гипотеза. Теорема о мощности множества всех подмножеств данного множества. Теорема Кантора- Бернштейна и её следствия.

## ***Раздел 2. Метрические пространства***

### **Тема 3. Понятие метрического пространства**

Определение и примеры метрических пространств. Окрестность точки в метрическом пространстве. Точки прикосновения, предельные точки, внутренние точки множества. Замыкание и внутренность множества. Открытые множества и их свойства. Замкнутые множества и их свойства. Сходящиеся последовательности точек в метрическом пространстве и их свойства.

### **Тема 4. Полные метрические пространства**

Фундаментальная последовательность точек и её сходимости. Полные метрические пространства (определение и примеры - полнота пространств  $R^n$ ,  $l_2$ ,  $C[a,b]$ ). Теорема о вложенных шарах. Всяду плотные и нигде не плотные множества. Теорема Бэра. Пополнение пространства.

## ***Раздел 3. Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега***

### **Тема 5. Структура множеств на числовой прямой**

Предельные, изолированные, точки прикосновения, внутренние точки множества точек на числовой прямой. Теорема о существовании предельной точки ограниченного множества точек на прямой. Понятие производного, совершенного множеств (определение и примеры). Канторово совершенное множество. Точная верхняя и точная нижняя грань множества. Теорема о существовании точной верхней (точной нижней) грани множества точек на прямой. Теорема о представлении открытого множества точек на прямой в виде объединения составляющих интервалов.

### **Тема 6. Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

Мера открытого и замкнутого ограниченных множеств точек прямой и её простейшие свойства. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества точек на прямой и её свойства. Понятие измеримого множества на прямой. Класс измеримых множеств. Определение и простейшие свойства измеримых функций. Определение и основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

## **Практические занятия**

*Практические занятия проводятся в форме практикума: предполагается решение задач разного уровня сложности при опоре на определения и свойства основных понятий по теме.*

## ***Раздел 1. Элементы теории множеств***

*Учебные цели:*

Сформировать систематизированные знания студентов по методам решения задач теории множеств, используя эвристические и логические рассуждения на основе

определений фундаментальных понятий теории множеств и формулировок основных теорем о свойствах бесконечных множеств.

### **Практическое занятие 1**

#### **Тема: Мощность множества. Счетные множества**

*Учебные цели:*

1. Повторить определения и свойства операций над множествами.
2. Решить типовые задачи на установление взаимно однозначного соответствия между некоторыми числовыми множествами.

*Основные термины и понятия:*

- множество,
- подмножество,
- объединение множеств,
- пересечение множеств,
- разность множеств, дополнение,
- взаимно однозначное соответствие.

### **Практическое занятие 2,3**

#### **Тема: Мощность множества. Счетные множества**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности, включающие:
  - а) установление взаимно однозначного соответствия между заданными множествами;
  - б) определение мощности множества.

*Основные термины и понятия:*

- отображение множеств,
- биекция,
- взаимно однозначное соответствие,
- эквивалентные множества,
- мощность множества, счетные множества.

### **Практическое занятие 4,5**

#### **Тема: Мощность континуума. Сравнение мощностей**

*Учебные цели:*

1. Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на определение мощности заданных множеств.

*Основные термины и понятия:*

- равномощные множества,
- конечные и бесконечные множества,
- счетные и несчетные множества,
- мощность континуума.

### **Практическое занятие 6**

#### **Тема: Мощность континуума. Сравнение мощностей**

*Учебные цели:*

1. Выполнить все задания контрольной работы №1 на тему «Элементы теории множеств»

*Основные термины и понятия:*

- операции над множествами,
- мощность множества.

## **Раздел 2. Метрические пространства**

*Учебные цели:*

Сформировать систематизированные знания студентов по методам решения задач теории метрических пространств, используя эвристические и логические рассуждения на основе определений фундаментальных понятий теории метрических пространств.

### **Практическое занятие 1,2**

#### **Тема: Понятие метрического пространства**

*Учебные цели:*

1. Повторить аксиомы метрики и определение метрического пространства.
2. Решить задачи разного уровня сложности на проверку аксиом метрики для множеств, элементами которых являются числа, функции, числовые последовательности.

*Основные термины и понятия:*

- метрика,
- аксиомы метрики,
- метрическое пространство.

### **Практическое занятие 3**

#### **Тема: Понятие метрического пространства**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на исследование принадлежности некоторых функций и числовых последовательностей заданным метрическим пространствам.

*Основные термины и понятия:*

- непрерывные функции,
- точки разрыва,
- числовые последовательности,
- числовой ряд,
- сходящийся ряд.

### **Практическое занятие 4**

#### **Тема: Понятие метрического пространства**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на применение определения и свойств открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве.

*Основные термины и понятия:*

- окрестность, предельные точки,
- точки прикосновения,
- внутренние точки множества,
- внутренность и замыкание множества.

### **Практическое занятие 5**

#### **Тема: Полные метрические пространства**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи на исследование сходимости последовательностей в метрических пространствах.

*Основные термины и понятия:*

- окрестность, предельные точки,
- точки прикосновения,
- внутренние точки множества,
- внутренность и замыкание множества,
- последовательность точек и её предел,
- сходящаяся последовательность точек,

-фундаментальная последовательность точек.

### **Практическое занятие 6**

#### **Тема: Полные метрические пространства**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на исследование сходимости последовательностей в метрических пространствах.
2. Решить задачи на исследование свойств множеств в полных метрических пространствах.

*Основные термины и понятия:*

- последовательность точек и её предел,
- сходящаяся последовательность точек,
- фундаментальная последовательность точек,
- всюду плотные множества,
- нигде ни плотные множества.

### **Практическое занятие 7**

#### **Тема: Полные метрические пространства**

*Учебные цели:*

1. Выполнить все задания контрольной работы №2 на тему «Метрические пространства».

#### ***Раздел 3. Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега***

*Учебные цели*

Сформировать навыки использования определений и свойств фундаментальных понятий теории меры при решении задач на вычисление и доказательство по теории функций действительного переменного.

### **Практическое занятие 1,2**

#### **Тема: Структура множеств на числовой прямой**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на исследование свойств числовых множеств на прямой.
2. Доказать теорему о представлении открытого множества точек на прямой в виде объединения составляющих интервалов.

*Основные термины и понятия:*

- предельные точки,
- замкнутые множества,
- внутренние точки,
- открытые множества,
- ограниченные множества,
- точная верхняя и точная нижняя грань множества.
- канторово совершенное множество.

### **Практическое занятие 3**

#### **Тема: Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на применение определения и свойств



меры множеств на прямой.

*Основные термины и понятия:*

- мера открытого и замкнутого ограниченных множеств,
- внешняя и внутренняя меры множества,
- мера Лебега на прямой,
- измеримые множества,
- счётности измеримость множества.

#### **Практическое занятие 4**

##### **Тема: Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи на применение определения и свойств измеримых функций и вычисление интеграла Лебега.

*Основные термины и понятия:*

- измеримая функция,
- измеримость и непрерывность функции,
- верхняя и нижняя суммы Лебега,
- интеграл Лебега.

#### **Практическое занятие 5**

##### **Тема: Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

*Учебные цели:*

1. Выполнить все задания самостоятельной работы №1 (дополнительная работа) на тему «Мера и интеграл Лебега».

*Основные термины и понятия:*

- измеримые множества,
- измеримые функции,
- интеграл Римана,
- интеграл Лебега.

#### **5.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

*Перечень литературных источников для самостоятельной работы обучающихся :*

1. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8999-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. —

URL: <https://urait.ru/bcode/491235>

2. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — ISBN 978-5-8114-9340-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/189430>

Самостоятельная учебная работа студента определяется программой дисциплины, перечнем теоретических вопросов для текущего промежуточного и итогового контроля знаний. Этот вид учебной деятельности студента предусматривает:

- проработку теоретического материала (изучение теории);
- решение задач и выполнение домашних заданий по определенным темам;
- периодический устный или письменный отчет о выполненных заданиях;
- подготовку к коллоквиумам, контрольным и самостоятельным работам;
- самоконтроль и промежуточный контроль полученных знаний.

Систематичность и добросовестность студента при выполнении заданий для самостоятельной работы могут существенно повлиять на уровень знаний, умений и навыков, формируемых в рамках данной учебной дисциплины. Предполагается, что активная самостоятельная работа студента по данной дисциплине будет способствовать развитию познавательной самостоятельности и творческой активности студента, формированию достаточно высокого уровня его математической культуры.

Кроме того, эффективность и успешность самостоятельной работы студента при изучении данной дисциплины непосредственно связаны с постепенным формированием профессиональных знаний и умений студента - будущего учителя математики.

### **Зачетное задание 1**

#### ***Тема: Элементы теории множеств***

Задание 1. Пусть  $I = \{ \alpha \}$  – произвольное множество индексов. Доказать равенство:

а)  $(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}) \cup A = \bigcap_{\alpha \in I} (A_{\alpha} \cup A)$

б)  $(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}) \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} (A_{\alpha} \cap A)$

Задание 2. Построить биективное отображение (биекцию):

- а) отрезка  $[0, 1]$  на всю числовую прямую;
- б) луча  $[0, +\infty)$  на интервал  $(a, b)$ .

Задание 3. Установить, какова мощность:

- а) множества всех многочленов с рациональными коэффициентами;
- б) множества всех трансцендентных (т.е. не алгебраических) чисел;

Задание 4. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества  $E$  на прямой больше единицы, то множество  $E$  конечно или счетное.

Задание 5. На плоскости задано множество  $E$  такое, что расстояние между любыми двумя точками этого множества больше, чем  $a$  (где  $a$  – данное положительное число). Доказать, что множество  $E$  не более чем счётно (т.е. либо счётное, либо конечное).

Задание 6. Доказать, что если  $A \setminus B \sim B \setminus A$ , то  $A \sim B$ .

(указание: представьте множества  $A$  и  $B$  в виде объединения двух множеств).

Задание 7.

Выяснить, какова мощность множества:

- 1) всевозможных последовательностей рациональных чисел;
- 2) всех отрезков на числовой прямой;
- 3) всех кругов на плоскости;
- 4) всех конечных и счетных подмножеств множества  $E$ , если  $E$  имеет мощность континуума.

### **Зачетное задание 2**

## Тема: Метрические пространства

### Задание 1.

На множестве  $\mathbb{R}^2$  заданы метрики:  $\rho(x,y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\}^{0,5}$ ,  $\sigma(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ , где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  – точки из  $\mathbb{R}^2$ . Установить, что представляют собой замкнутые шары в метрических пространствах  $(\mathbb{R}^2, \rho)$ ,  $(\mathbb{R}^2, \sigma)$  и изобразить их на рисунке.

### Задание 2.

Найти расстояние между функциями:

а)  $x(t) = \sin 2t$  и  $y(t) = \cos 2t$  в пространстве  $C[0, \pi]$ ;

б)  $x(t) = t^4 + 4t + 1,4$  и  $y(t) = 2t^3 + 3t^2$  в пространстве  $C[-1, 1]$ ;

### Задание 3.

Найти замыкание множества:

а) всех точек вида  $\frac{p^2}{q^2}$ , где  $p$  и  $q$  – всевозможные целые числа, причем  $q \neq 0$ ;

б) всех точек вида  $2^{\frac{p}{q}}$ , где  $p$  и  $q$  – всевозможные натуральные числа.

### Задание 4.

а). Доказать, что внутренность любого множества в метрическом пространстве есть открытое множество.

б). Доказать, что производное множество (т.е. множество всех предельных точек) любого множества в метрическом пространстве есть замкнутое множество.

в). Доказать, что множество всех точек  $(x, y)$  с рациональными координатами всюду плотно на плоскости.

## 6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации приведен в приложении

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

### 7.1. Основная литература:

1. Власова, Е. А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212189>
2. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210809>

### 7.2. Дополнительная литература:

1. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и

- доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8999-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/491235>
2. Лелявин С.Н. Задачи по действительному и функциональному анализу : учебное пособие / Лелявин С.Н. — Москва :Русайнс, 2020. — 172 с. — ISBN 978-5-4365-6311-4. — URL: <https://book.ru/book/938745>
  3. Смолин, Ю. Н. Введение в теорию функций действительной переменной : учебное пособие / Ю. Н. Смолин. — 2-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2017. — 518 с. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=364595>
  4. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-1822-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168826>

## **8. Перечень современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем**

Все обучающихся университета обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, которые подлежат обновлению при необходимости, что отражается в листах актуализации рабочих программ.

### **Современные профессиональные базы данных:**

1. Министерство образования и науки Российской Федерации <http://mon.gov.ru>
2. Федеральный портал «Российское образование» <http://www.edu.ru>
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам <http://window.edu.ru>
4. Федеральный центр информационно- образовательных ресурсов <http://fcior.edu.ru>
5. Министерство образования Московской области <http://mo.mosreg.ru>
6. Интернет-экзамен в сфере профессионального образования (ФЭПО) <http://www.fepo.ru>
7. Каталог электронных образовательных ресурсов Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) <http://eor.edu.ru>
- 8.Портал Федерального института педагогических измерений <http://www.fipi.ru>
9. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://edu-top.ru/katalog/>
10. Образовательные ресурсы Интернета "Всем, кто учится" <http://www.alleng.ru>
11. Электронная информационно-образовательная среда Университета <http://dis.ggtu.ru/>
12. «Университетская библиотека online» <http://biblioclub.ru/>
13. Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>

14. Электронно-библиотечная система «Юрайт» [www.biblio-online.ru](http://www.biblio-online.ru)

15. Электронная библиотека диссертаций <http://diss.rsl.ru/>

#### Информационные справочные системы:

1. информационно-поисковые системы [www.google.ru/](http://www.google.ru/), [www.yandex.ru/](http://www.yandex.ru/)

2. Прикладная математика: Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями: <http://www.pm298.ru>


#### 9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине имеется в наличии следующая материально-техническая база:

Аудитории	Программное обеспечение
<ul style="list-style-type: none"><li>- учебная аудитория для проведения учебных занятий по дисциплине, оснащенная компьютером с выходом в интернет, мультимедиа проектором;</li><li>- помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ГГТУ;</li><li>- специализированная аудитория для проведения лабораторных работ по дисциплине, оснащенная набором реактивов и лабораторного оборудования</li></ul>	Операционная система Пакет офисных приложений Браузер Firefox, Яндекс

#### 10. Обучение инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.

При необходимости рабочая программа дисциплины может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

Автор (составитель):  к.ф.-м.н., доцент Панчищина В.А .

Программа одобрена на заседании кафедры математики и экономики 26.06.2023г., протокол № 8.

Зав. кафедрой



Каменских Н.А.

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ,  
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Б1.О.07.04**

**Теория функций действительного переменного**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.01 Педагогическое образование</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>«Математика»</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2023г.**

## 1.1. Индикаторы достижения компетенций

Код и наименование профессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции
ПК-1.Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).

## 1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.

Оценка уровня освоения компетенций на разных этапах их формирования проводится на основе дифференцированного контроля каждого показателя компетенции в рамках оценочных средств, приведенных в ФОС.

Оценка «отлично», «хорошо», «зачтено» соответствует **повышенному** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «удовлетворительно», «зачтено» соответствует **базовому** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «неудовлетворительно», «не зачтено» соответствует показателю «**компетенция не освоена**».

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде	Критерии оценивания
<i>Оценочные средства для проведения текущего контроля</i>				

1	<p><b>Самостоятельная работа</b></p> <p>(показатель компетенции «Умение»)</p>	<p>Контрольное мероприятие, цель которого состоит в промежуточном контроле знаний по теме.</p>	<p>Комплект заданий</p>	<p>- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если правильно выполнены все задания ;</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если представлено решение всех задач, включенных в работу; при этом: а) при верном ходе рассуждений решение отдельных задач содержит вычислительные ошибки, приведшие к неверному ответу; б) правильное решение одной-двух задач не доведено до конца;</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если правильно выполнено примерно 30% всех заданий.</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если решение не отвечает ни одному из требований , указанных выше.</p>
2	<p><b>Контрольная работа</b></p> <p>(показатель компетенции «Владение»)</p>	<p>Контрольное мероприятие, цель которого состоит в выявлении уровня знаний, умений и навыков, сформированных при изучении</p>	<p>Комплект заданий .</p>	<p>- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если правильно выполнены все задания (обоснованно получен правильный ответ), либо допущены незначительные погрешности (решение</p>



		определенной темы данной дисциплины		<p>задачи в целом верное, только на последнем этапе допущены вычислительные ошибки);</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если представлено решение всех задач, включенных в работу; при этом: а) при верном ходе рассуждений решение отдельных задач содержит вычислительные ошибки, приведшие к неверному ответу; б) правильное решение одной - двух задач не доведено до конца ( представлено примерно 80% решения задачи);</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если правильно выполнено примерно 30% всех заданий .</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если решение не отвечает ни одному из требований , указанных выше.</p>
<i>Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации</i>				
3	<b>Экзамен</b> (показатель компетенции)	Контрольное мероприятие, которое	Вопросы к экзамену	- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если дан полный ответ

	«Знание»)	проводится по окончании изучения дисциплины в виде собеседования по экзаменационным билетам.		<p>на вопросы билета и правильные ответы на дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если дан краткий ответ на вопросы билета и правильные ответы на дополнительные вопросы или полный ответ на вопросы билета и один – два неправильных ответа на дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если дан краткий ответ на вопросы билета и неправильные ответы на отдельные дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если ответ не соответствует ни одному из требований, указанных выше.</p>
--	-----------	--	--	--

**1.3. Типовые контрольные задания и/ или иные материалы для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и / или опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.**

#### **Текущий контроль**

В случае применения в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий используется <https://dis.ggtu.ru/course/view.php?id=6078>

**Контрольная работа №1**

**Тема: Элементы теории множеств**

**Вариант 1**

1. Верны ли равенства:

а)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ ;

б)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ ;

Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

2. Установить взаимно однозначное соответствие между

точками открытого квадрата  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  и точками открытого прямоугольника  $(a;b) \times (c;d)$ .

3. Установить мощность множества всех интервалов  $(a,b)$  с рациональными концами.

4. Выяснить, какова мощность множества функций, непрерывных на отрезке  $[0,1]$ .

**Вариант 2**

1. Верны ли равенства:

а)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ;

б)  $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ ;

Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

2. Установить взаимно однозначное соответствие между

точками открытого квадрата  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  и точками плоскости.

3. Установить мощность множества всех многочленов с целыми коэффициентами.

4. Выяснить, какова мощность множества функций, имеющих не более чем счетное число точек разрыва на отрезке  $[0,1]$ .

4. Выяснить, какова мощность множества кусочно-линейных непрерывных функций на отрезке  $[0,1]$ .

**Контрольная работа №2**

**Тема: Метрические пространства**

**Вариант 1**

1. Проверить, определяет ли функция  $f(x,y)$  метрику на множестве  $\mathbf{R}^n$  :

$$f(x,y) = \max |x_k - y_k|, 1 \leq k \leq n$$

2. Выяснить, принадлежит ли функция  $x(t)$  пространствам  $C[a,b]$ ,  $C[c,d]$ , если  $[a,b] = [0,1]$ ,  $[c,d] = [-1,1]$

$$x(t) = \begin{cases} t \ln t, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ \frac{t}{\ln(t^2 + 1)}, & t < 0 \end{cases}.$$

3. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность  $x$  пространству  $l_1$ , если

$$x = \left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

4. Даны функции  $x(t)$  и  $y(t)$ . Выяснить, принадлежит ли точка  $y(t)$  замкнутому шару с центром в точке  $x(t)$  радиуса  $r$  из пространства  $C[a,b]$ , если

$$x(t) = \operatorname{tg}^2 t, \quad y(t) = 2 \cdot \operatorname{tg} t, \quad r = 3, \quad [a,b] = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

5. Установить, сходится ли к функции  $x(t)$  последовательность функций  $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$  в пространстве  $C[a,b]$ , если

$$x_n(t) = t e^{-nt}, \quad x(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1].$$

## Вариант 2

1. Проверить, определяет ли функция  $f(x,y)$  метрику на множестве  $\mathbf{R}$ :

$$f(x,y) = |x^3 - y^3|,$$

2. Выяснить, принадлежит ли функция  $x(t)$  пространствам  $C[a,b]$ ,  $C[c,d]$

если  $[a,b] = [0,3]$ ,  $[c,d] = [-2,2]$

$$x(t) = \begin{cases} t \ln t, & t > 0 \\ 1, & t = 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} t}{t}, & t < 0 \end{cases}$$

3. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность  $x$  пространству  $l_1$ , если

$$x = \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

4. Даны функции  $x(t)$  и  $y(t)$ . Выяснить, принадлежит ли точка  $y(t)$  замкнутому шару с центром в точке  $x(t)$  радиуса  $r$  из пространства  $C[a,b]$ , если

$$x(t) = \frac{8}{t-2} + 2t + 5, \quad y(t) = t^2/2, \quad r = 2, \quad [a,b] = [-1; 1/2]$$

5. Установить, сходится ли к функции  $x(t)$  последовательность функций  $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$  в пространстве  $C[a,b]$ , если

$$x_n(t) = t n \sqrt{n} e^{-nt}, \quad x(t) = 0, \quad [a,b] = [0,2].$$

*Комплект заданий для самостоятельной работы*

**Самостоятельная работа №1 (дополнительная работа)**

**Тема: Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега.**

**Вариант 1.**

1. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для иррациональных, больших чем } \frac{1}{3} \\ x^3 & \text{для иррациональных, меньших чем } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{в рациональных точках} \end{cases}$$

2. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{K} \\ 2, & \text{если } x \notin \mathbb{K} \end{cases}$$

3. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если функция  $f(x)$  равна  $x^2$  в точках канторова множества  $\mathbb{K}$  и равна  $\frac{1}{2^n}$  на тех смежных интервалах, длина которых равна  $\frac{1}{3^n}$ .

### Вариант 2.

1. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{для иррациональных } x \text{ из } [0,1] \\ x^3 & \text{для рациональных } x \text{ из } [0,1] \end{cases},$$

2. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } x \in \mathbb{K} \\ 3, & \text{если } x \notin \mathbb{K} \end{cases}$$

3. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если функция  $f(x)$  равна  $x^4$  в точках канторова множества  $\mathbb{K}$  и равна  $\frac{1}{2^n}$  на тех смежных интервалах, длина которых равна  $\frac{1}{3^n}$ .

### Промежуточная аттестация

В случае применения в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий используется <https://dis.ggtu.ru/course/view.php?id=6078>

### Вопросы для подготовки к экзамену

#### Часть I

1. Множество, операции над множествами, свойства операций над множествами.

2. Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетные множества (определение и примеры).
3. Характеристический признак счетности множества.
4. Теорема о существовании счетного подмножества бесконечного множества.
5. Теорема о мощности подмножества счетного множества.
6. Теоремы о мощности объединения разных множеств (конечного и счетного, не более чем счетной совокупности счетных множеств, конечного числа счетных множеств, счетной совокупности конечных, счетной совокупности счетных)
7. Теорема о счетности множества всех рациональных чисел.
8. Теорема о мощности объединения бесконечного и не более чем счетного множеств.
9. Теорема о мощности разности несчетного и не более чем счетного множеств.
10. Теорема о несчетности множества всех точек отрезка  $[0, 1]$ .
11. Теорема о мощности множества  $[a, b]$ .
12. Теоремы о мощности объединения разных множеств мощности континуума (конечного числа, счетной совокупности) и их следствия.
13. Теорема о мощности множества всех подмножеств данного множества.

### ***Часть 2***

14. Определение и примеры метрических пространств.
15. Открытый и замкнутый шары в метрическом пространстве (определение и примеры).
16. Точка прикосновения множества в метрическом пространстве (определение и примеры).
17. Замыкание множества и его свойства.
18. Предельная точка множества. Теорема о существовании бесконечного множества точек данного множества в окрестности его предельной точки.
19. Внутренняя точка множества, открытые множества (определение и примеры).
20. Теорема о том, что открытый шар является открытым множеством.
21. Теорема об объединении любой совокупности открытых множеств.
22. Теорема о пересечении конечной совокупности открытых множеств.
23. Замкнутые множества и их свойства.
24. Всюду плотное и нигде не плотное множество (определение и примеры).
25. Сходящаяся последовательность точек и её свойства.
26. Фундаментальная последовательность точек и её сходимости.
27. Определение и примеры полных метрических пространств.
28. Теорема о вложенных шарах.
29. Теорема Бэра.

### ***Часть 3***

30. Предельные, изолированные, точки прикосновения, внутренние точки множества точек на прямой.
31. Теорема о существовании предельной точки ограниченного множества точек на прямой.
32. Понятие производного, совершенного множества (определение и примеры).
33. Точная верхняя и точная нижняя грань множества.

34. Теорема о существовании точной верхней( точной нижней ) грани множества точек на прямой.
35. Теорема о представлении открытого множества точек на прямой в виде объединения составляющих интервалов.
36. Мера открытого ограниченного множества точек на прямой и её простейшие свойства. Примеры.
37. Мера ограниченного замкнутого множества точек на прямой.
38. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества точек на прямой.

**Схема соответствия типовых контрольных заданий и оцениваемых знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций:**

1	ПК-1.Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.13нает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	Вопросы к экзамену Контрольная работа Диагностическая работа
---	--	---	--

### *Диагностическая работа №1*

( для проверки уровня сформированности компетенции ПК-1 по индикатору ПК-1.1)

**Часть 1.** Знание определения и свойств операций над множествами помогает легко находить множество решений неравенств и систем неравенств. Проверьте себя:

**1.1.** Пусть А – множество решений неравенства  $x^2 - x - 6 \geq 0$ ;

В – множество решений неравенства  $x^2 - x < 0$ ;

С – множество решений системы неравенств  $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases}$

Тогда множество С является ( выберите один вариант ответа ) :

- а. объединением  
б. пересечением  
числовых множеств А и В.

**1.2.** Выберите множества А, В, С из следующего списка числовых промежутков(в каждом случае выберите один вариант ответа):

А:	1) [-2,3)
	2) $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$
	3) $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$
В:	4) [-4,0)
	5) $(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$
	6) (0,4)

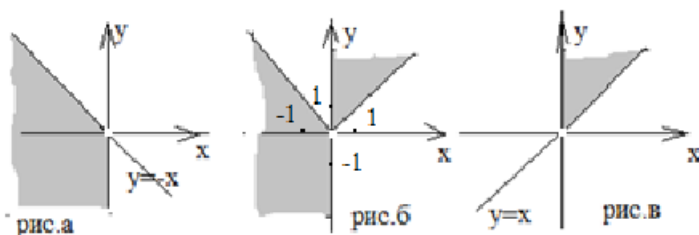
С:	7) [-2,0)
	8) [2,4)
	9) [3,4)

А	
В	
С	

## 2.

**2.1.** Установите соответствие между описанием и изображением множества точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям 1-3, записанным в данной таблице (т.е. координаты удовлетворяют системе неравенств при условии  $y \neq 0$  или одному неравенству с двумя переменными  $x$  и  $y$ ):

1	$\begin{cases} x > 0 \\ y - x \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x < 0 \\ y + x \leq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$
3	$\frac{y- x }{xy^2} \geq 0$



1	2	3

## 2.2. Пусть:

А- множество решений системы неравенств 1 при условии  $y \neq 0$  ;

В- множество решений системы неравенств 2 при условии  $y \neq 0$  ;

С- множество решений неравенства 3.

Тогда множество С является ( выберите один вариант ответа ) :

а. объединением

б. пересечением

множеств А и В на координатной плоскости (xOy).

**Часть 2.** Знание определения и свойств функций  $f(x)$  одного действительного переменного помогает создавать представления об отображении одних числовых множеств на другие, тем самым формируя понимание эквивалентности числовых множеств, рассматриваемых в школьном курсе математики.

Проверьте себя:

**3.** На числовой прямой заданы два множества А и D, причем

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}, D - \text{область определения функции } f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

**3.1.** Пусть множество Р является пересечением множеств А и D. Установите взаимно - однозначное соответствие между множеством А и Р, заполнив следующую таблицу :



A	1	1/2	1/3	1/4	1/5	...	1/n	...
P						...		...

**3.2.** Можно ли таким же способом установить соответствие между множеством A и объединением множеств A и D ? (выберите один вариант ответа):

- а. да, можно
- б. нет, нельзя
- в. можно при некоторых дополнительных условиях.

**4.** Укажите, какая из следующих функций а-г взаимно-однозначно отображает интервал  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  на открытый луч  $(0, +\infty)$  числовой прямой (выберите один вариант ответа):

- а.  $y = x^2$
- б.  $y = \operatorname{tg} x$
- в.  $y = -\operatorname{ctg} x$
- г.  $y = x$

**5.1.** Для каждой из функций  $f_1(x) = \sin x \cdot \cos x$  и  $f_2(x) = (\sin x + \cos x)^2$ , заданных на всей числовой прямой, найдите множества  $E_1$  и  $E_2$  значений этих функций:

$E_1 = E(f_1) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $E_2 = E(f_2) = \underline{\hspace{2cm}}$

**5.2.** Запишите линейную функцию  $f(x)$ , которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этими множествами значений:

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

*Подсказка: Для нахождения линейной зависимости между элементами множеств  $E(f_i)$  изобразите множества значений функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно на осях (Ox) и (Oy) прямоугольной системы координат на плоскости и рассмотрите некоторую прямую на плоскости.*

**Часть 3.** Знание определения и свойств функций  $f(x)$  одного действительного переменного помогает легко находить решение многих задач школьного курса алгебры и начал анализа. Проверьте себя:

**6.** Решите неравенство  $2^x > 1-x$

**6.1.** Множество решений этого неравенства является числовым промежутком (выберите один вариант ответа):

- а. (0,1)
- б. (0, +∞)
- в. [0,1)
- г. [0, +∞)

**6.2.** Укажите, какое из следующих свойств функций действительного переменного используется при решении данного неравенства (выберите один вариант ответа):

- а. нечетность
- б. периодичность
- в. монотонность

**7.1.** Найдите значение функции  $f(x) = 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}$  в точках  $x_1 = 17/36$  и  $x_2 = 7/3$ :

$f(\frac{17}{36}) = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $f(\frac{7}{3}) = \underline{\hspace{1cm}}$ .

**7.2.** Заполните пропуски в следующем предложении:

Функция  $f(x) = 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}$

является монотонно \_\_\_\_\_ на множестве  $D = \underline{\hspace{1cm}}$  решений

неравенства  $\log_7(7x - 3) \geq \log_7(1 - 2x)$ .

8. Нули функции  $f(x) = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$ , образуют числовое множество  $A$ , содержащее (выберите один вариант ответа):

- а. один элемент
- б. два элемента
- в. более двух элементов

Запишите это множество:  $A = \{ \text{_____} \}$

Подсказка: обратите внимание на множество значений функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , где  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ .

9. Выясните, сколько общих точек имеет график функции  $f(x) = x - 2$  с графиком каждой из функций  $f_1(x) = \sqrt{|x|}$  и  $f_2(x) = x^3 - 2$ .

9.1. Укажите, какие из следующих свойств функций действительного переменного используются при поиске ответа на вопрос (выберите несколько вариантов ответа):

- а. четность
- б. периодичность
- в. монотонность

9.2. Запишите в ответе количество  $q_0$  общих точек:

$f_1(x) = \sqrt{ x }$ и $f(x) = x - 2$	$f_2(x) = x^3 - 2$ и $f(x) = x - 2$
$q_{01} =$	$q_{02} =$

10. Выясните, из одной части или нескольких частей, не имеющих общих точек, состоят графики следующих функций: (в ответе укажите количество  $q_{01}$  таких частей):

а)

$$f_1(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2}, & \text{если } -2 \leq x < 2 \\ x - 2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

б)

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}, & \text{если } x > -1 \\ \arctg \frac{1}{x+1}, & \text{если } x < -1 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = -1 \end{cases}$$

$f_1(x)$	$f_2(x)$
$q_{01} =$	$q_{02} =$