

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Егорова Галина Викторовна  
Должность: Проректор по учебной работе  
Дата подписания: 28.09.2023 11:27:38  
Уникальный программный ключ:  
4963a4167398d8232817460c35a76d1668e7c25

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**УТВЕРЖДАЮ  
проректор**



**26 июня 2023 г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.07.01  
Алгебра**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.01 Педагогическое образование</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2023 г.**

## 1. Пояснительная записка

Рабочая программа дисциплины составлена на основе учебного плана 44.03.01 Педагогическое образование по профилю Математика 2023 года начала подготовки.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

### Цели дисциплины

Целью учебной дисциплины "Алгебра" является формирование у студентов компетенций, необходимых для осуществления профессиональной деятельности, для реализации образовательных программ по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов.

### Задачи дисциплины

Задачи дисциплины формулируются следующим образом:

- формирование у обучающегося комплекса знаний, умений и навыков, необходимых для реализации образовательных программ по математике в соответствии с требованиями образовательных стандартов;
- развитие интеллектуальных и общекультурных способностей обучающихся.

### Знания и умения обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины «Алгебра» студент должен обладать следующими компетенциями:	Коды формируемых компетенций
<b>Профессиональные компетенции (ПК):</b>	
Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1

### Индикаторы достижения компетенции

Код и наименование универсальной компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	<b>ПК-1.1</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). <b>ПК-1.2</b> Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО. <b>ПК-1.3</b> Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.

## 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.О.07.01 Алгебра относится к модулю «Предметно-методический»

обязательной части блока 1 Дисциплины (модули).

Программа курса предполагает наличие у обучающихся знаний по дисциплинам: геометрия, математический анализ, а также знаний, сформированных при изучении школьного курса алгебры.

Дисциплины, для изучения которых необходимы знания данного курса: Геометрия, Математическая логика, Дискретная математика, Теория чисел, Задачи повышенной трудности по математике, Числовые системы, Теория вероятностей и математическая статистика, Математическое моделирование, Методы оптимизации.

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Раздел/Тема	Семестр	Все го час.	Виды учебных занятий			Проме жуточн ая аттеста ция
			Контактная работа (ауд.)		СРС	
			Лекции	ПЗ		
<b>Раздел 1</b>	<b>1</b>	<b>60</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	
Тема 1.1. Элементы теории множеств. Алгебраические операции. Алгебра	1	16	2	6	8	
Тема 1.2. Матрицы и определители	1	24	4	8	12	
Тема 1.3. Системы линейных уравнений	1	20	4	6	10	
<b>Раздел 2</b>	<b>1</b>	<b>48</b>	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	
Тема 2.1. Алгебраические структуры. Группа. Кольцо. Поле	1	24	4	8	12	
Тема 2.2. Арифметическое векторное пространство над полем	1	8	2	2	4	
Тема 2.3. Бинарные отношения	1	16	2	6	8	
<b>Промежуточная аттестация - экзамен</b>	1	36				36
<b>ИТОГО в 1 семестре</b>		<b>144</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>54</b>	<b>36</b>
<b>Раздел 3</b>	<b>2</b>	<b>44</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>22</b>	
Тема 3.1. Комплексные числа	2	20	4	6	10	
Тема 3.2. Алгебраические структуры и системы. Изоморфизм. Гомоморфизм	2	24	6	6	12	
<b>Раздел 4</b>	<b>2</b>	<b>28</b>	<b>8</b>	<b>6</b>	<b>14</b>	
Тема 4.1. Линейное (векторное) пространство.	2	20	6	4	10	
Тема 4.2. Изоморфизм линейных пространств	2	8	2	2	4	
<b>Промежуточная аттестация - зачет</b>	<b>2</b>					
<b>ИТОГО во 2 семестре</b>		<b>72</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	
<b>Раздел 5</b>	<b>3</b>	<b>94</b>	<b>10</b>	<b>24</b>	<b>60</b>	
Тема 5.1. Евклидовы векторные пространства	3	26	2	8	16	
Тема 5.2. Линейные операторы	3	36	4	10	22	
Тема 5.3. Собственные значения и собственные векторы линейного	3	20	2	6	12	

Раздел/Тема	Семестр	Все го час.	Виды учебных занятий			Проме жуточн ая аттеста ция
			Контактная работа (ауд.)		СРС	
			Лекции	ПЗ		
оператора						
Тема 5.4. Кольцо линейных операторов	3	12	2	0	10	
<b>Раздел 6</b>	3	<b>40</b>	<b>8</b>	<b>12</b>	<b>30</b>	
Тема 6.1. Квадратичные формы	3	32	4	12	20	
Тема 6.2. Кольцо целых чисел	3	8	4	0	10	
<b>Промежуточная аттестация - экзамен</b>	3	<b>36</b>				36
<b>ИТОГО в 3 семестре</b>		<b>180</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>90</b>	<b>36</b>
<b>Раздел 7</b>	4	<b>102</b>	<b>12</b>	<b>24</b>	<b>66</b>	
Тема 7.1. Многочлены от одной переменной над полем. Кольцо многочленов	4	46	8	8	30	
Тема 7.2. Многочлены над полем рациональных чисел	4	28	2	8	18	
Тема 7.3. Многочлены над полем действительных и над полем комплексных чисел	4	28	2	8	18	
<b>Раздел 8</b>	4	<b>42</b>	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>24</b>	
Тема 8.1. Элементы теории конечных полей	4	16	2	4	10	
Тема 8.2. Многочлены от нескольких переменных	4	26	4	8	14	
<b>Промежуточная аттестация - зачет</b>						
<b>ИТОГО в 4 семестре</b>		<b>144</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>90</b>	

## Содержание дисциплины, структурированное по темам

### Лекции

#### Раздел 1.

##### **Тема 1.1. Элементы теории множеств. Алгебраические операции. Алгебра**

Понятие множества. Операции над множествами. Основные свойства операций над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна. Прямое произведение множеств. Основные числовые множества.

Алгебраические операции. Понятие алгебры.

##### **Тема 1.2. Матрицы и определители**

Операции над матрицами и их свойства.

Определитель квадратной матрицы 2-го, 3-го и  $n$ -го порядков. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя. Определитель произведения матриц. Миноры  $k$ -того порядка матрицы. Вычисление определителей.

Понятие обратной матрицы, свойства обратимых матриц. Условие обратимости матриц. Правило вычисления обратной матрицы.

Теорема о ранге матрицы. Элементарные преобразования строк матрицы.

Строчечный и столбцевый ранги матрицы, их неизменяемость при элементарных преобразованиях. Равенство строчечного и столбцевого рангов матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и приведенному ступенчатому видам. Правило вычисления ранга матрицы.

### **Тема 1.3. Системы линейных уравнений (СЛУ)**

Понятие системы линейных уравнений с  $n$  переменными (неизвестными). Векторная и матричная формы записи системы линейных уравнений. Определение решения системы, её совместности.

Основная матрица и расширенная матрица системы. Элементарные преобразования уравнений системы. Равносильные системы линейных уравнений. Метод Гаусса (метод Жордана-Гаусса) решения систем линейных уравнений. Критерий совместности, исследование системы на совместность.

Запись и решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными в матричном виде. Метод обратной матрицы. Правило Крамера решения таких систем.

Однородные СЛУ. Фундаментальная система решений однородной СЛУ. Связь между решениями неоднородной СЛУ и решениями соответствующей ей однородной СЛУ.

## **Раздел 2.**

### **Тема 2.1. Алгебраические структуры. Группа. Кольцо. Поле**

Алгебраические операции и их свойства. Алгебраическая структура.

Нейтральные и симметричные элементы.

Понятие группы. Примеры групп.

Понятие кольца. Примеры колец.

Понятие поля. Примеры полей.

### **Тема 2.2. Арифметическое векторное пространство над полем**

Арифметическое  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $P$ . Действия над векторами, их свойства. Линейные комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов и его свойства.

Пространство решений системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений как базис пространства решений системы однородных линейных уравнений.

### **Тема 2.3. Бинарные отношения**

Бинарные отношения. Представление бинарных отношений графами.

Виды бинарных отношений на заданном множестве: рефлексивное, антирефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное; отношение эквивалентности, отношение порядка.

## **Раздел 3.**

### **Тема 3.1. Комплексные числа**

Построение поля комплексных чисел как множества упорядоченных пар действительных чисел. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними. Алгебраическая форма комплексного числа.

Сопряженные комплексные числа и их свойства. Модуль комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Корни  $n$ -ой степени из 1, их свойства. Корни  $n$ -ой степени из произвольного комплексного числа. Формула Муавра.

### **Тема 3.2. Алгебраические структуры и системы. Изоморфизм. Гомоморфизм**

Бинарные операции и их свойства. Алгебраическая структура.

Понятие группы. Примеры групп. Подгруппы. Циклические группы, их свойства. Изоморфизм циклических групп. Теорема Кэли. Фактор-группа. Изоморфизм и

гомоморфизм групп, их свойства.

Понятие кольца и подкольца. Изоморфизм колец.

Понятие поля. Простейшие свойства поля, примеры. Подполе, его свойства, примеры.

Понятие алгебраической системы. Изоморфизм. Гомоморфизм.

#### **Раздел 4.**

##### **Тема 4.1. Линейное (векторное) пространство**

Понятие векторного пространства. Простейшие свойства векторных пространств. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка множества векторов. Сумма подпространств. Линейные многообразия.

Базис и размерность векторного пространства, координаты векторов в заданном базисе. Матрица перехода.

##### **Тема 4.2. Изоморфизм линейных пространств**

Изоморфизм конечномерных векторных пространств.

#### **Раздел 5.**

##### **Тема 5.1. Евклидовы векторные пространства**

Скалярное умножение в векторном пространстве. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации.

Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Ортонормированный базис евклидова пространства. Изоморфизмы евклидовых пространств.

##### **Тема 5.2. Линейные операторы**

Линейные отображения и операторы над полем  $P$ . Примеры, свойства линейных операторов векторного пространства над произвольным полем. Ядро и образ линейного оператора.

Представление линейных операторов матрицами. Ранг линейного оператора. Обратимые операторы. Связь между матрицами линейного оператора относительно различных базисов.

##### **Тема 5.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора**

Инвариантные подпространства (относительно линейного оператора). Собственные векторы и собственные значения. Нахождение собственных векторов линейного оператора. Характеристическое уравнение. Спектр оператора. Линейные операторы с простым спектром. Условия, при которых матрица линейного оператора подобна диагональной матрице.

##### **Тема 5.4. Кольцо линейных операторов**

Операции над линейными операторами. Алгебра линейных операторов векторного пространства. Изоморфизм алгебры линейных операторов и полной матричной алгебры. Кольцо линейных операторов.

#### **Раздел 6.**

##### **Тема 6.1. Квадратичные формы**

Билинейные и квадратичные формы. Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции. Ранг квадратичной формы. Теорема о конгруэнтности двух квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра и его следствие.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Ортогональное преобразование и его матрица. Правило нахождения

ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

### **Тема 6.2. Кольцо целых чисел**

Аддитивная группа целых чисел. Кольцо целых чисел. Отношение делимости в кольце целых чисел. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя. Наименьшее общее кратное. Простые числа, их бесконечность. Решето Эратосфена. Разложение целого числа на простые множители и его единственность.

## **Раздел 7.**

### **Тема 7.1. Многочлены от одной переменной над полем. Кольцо многочленов**

Степень многочлена. Операции над многочленами и их свойства. Кольцо многочленов от одной переменной над полем  $P$ .

Свойства делимости многочленов. Деление с остатком в кольце многочленов. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

Неприводимые многочлены над полем  $P$  и их свойства. Основная теорема делимости многочленов. Каноническое разложение.

Правила дифференцирования многочленов над полем  $P$ . Формула Тейлора.

Корни многочлена над произвольным коммутативным кольцом.

Теорема Безу. Схема Горнера. Кратные корни.

Наибольшее возможное число корней многочлена в области целостности.

### **Тема 7.2. Многочлены над полем рациональных чисел**

Вычисление рациональных корней многочлена.

Неприводимость многочленов над полем рациональных чисел.

Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.

Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена над полем рациональных чисел.

### **Тема 7.3. Многочлены над полем действительных и над полем комплексных чисел**

Основная теорема алгебры и ее следствия. Формулы Виета.

Неприводимость многочленов над полем действительных чисел. Способы нахождения границ действительных корней. Теорема Штурма (о числе действительных корней многочлена над полем  $P$ ).

Разрешимость уравнений третьей степени в квадратных радикалах.

Решение уравнений четвертой степени.

## **Раздел 8.**

### **Тема 8.1. Элементы теории конечных полей**

Классы вычетов по модулю простого числа  $p$ . Вычисления в кольце классов вычетов.

Примеры конечных полей. Число элементов конечного поля. Характеристика поля. Свойства конечного поля.

Многочлены над простыми конечными полями. Неприводимые многочлены. Существование неприводимых многочленов произвольной степени над конечными полями. Расширение конечных полей.

### **Тема 8.2. Многочлены от нескольких переменных**

Понятие многочлена от нескольких переменных. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Однородные многочлены. Лексикографическое упорядочение членов многочлена.

Приводимые и неприводимые многочлены от нескольких переменных над полем  $P$ .

Симметрические многочлены. Основные (элементарные) симметрические многочлены и их применение в решении задач. Основная теорема о симметрических

многочленах.

Результант. Исключение переменных.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

### **РАЗДЕЛ 1 (1 семестр)**

**Тема 1.1. Элементы теории множеств. Алгебраические операции. Алгебра**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.1 (2 часа)**

Учебные цели:

1. Закрепить основные понятия теории множеств, рассмотренные на лекционных занятиях.
2. Научиться производить операции над множествами.
3. На примерах разобрать свойства операций над множествами.
4. Научиться использовать диаграммы Эйлера-Венна.
5. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Основные (неопределяемые) понятия. Множество. Пустое множество. Равенство множеств. Включение. Подмножество. Операции над множествами. Универсальное множество. Основные тождества для множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.2 (2 часа)**

Учебные цели:

1. Закрепить основные понятия теории множеств, рассмотренные на лекционных занятиях.
2. Научиться производить операции над прямым произведением множеств.
3. На примерах разобрать свойства прямого произведения множеств.
4. Научиться использовать чертеж при рассмотрении прямого произведения множеств.
5. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Упорядоченная пара элементов множества. Прямое (декартово) произведение множеств. Отношение на паре множеств.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.3 (2 часа)**

**Контрольная работа №1 по теме: "Элементы теории множеств"**

Учебные цели:

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях №1.1-1.2
2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

Основные термины и понятия:

см. практические занятия №1.1-1.2.

**Тема 1.2. Матрицы и определители**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.4 (2 часа)**

**Тема «Матрицы. Операции на множестве матриц»**

Учебные цели:

1. Закрепить основные понятия теории матриц, рассмотренные на лекционных занятиях.
2. Научиться складывать, вычитать и умножать матрицы, находить степень квадратной матрицы.
3. На примерах разобрать свойства алгебраических операций на множестве матриц.
4. Научиться составлять диагностические задания по теме занятия.
5. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Матрица. Элементы матрицы. Размер матрицы. Матрица-строка. Матрица-столбец. Диагональная матрица. Порядок квадратной матрицы. Операция транспонирования



матрицы. Симметрическая матрица. Кососимметрическая матрица.

Линейные действия над матрицами (сложение матриц, умножение матрицы на число).

Умножение матрицы-строки на матрицу-столбец. Умножение матриц. Единичная матрица. Целая положительная степень квадратной матрицы. Нулевая матрица.

Свойства алгебраических операций на множестве матриц (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность).

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.5 (2 часа)**

**Тема: «Вычисление определителей»**

Учебные цели:

1. Научиться вычислять определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.
2. Научиться вычислять определители квадратных матриц  $n$ -го порядка с помощью разложения определителя по элементам строки (столбца).
3. Научиться вычислять определители квадратных матриц  $n$ -го порядков, выбирая более рациональные способы (используя свойства определителей).
4. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
5. Научиться решать матричные уравнения и делать проверку.

Основные термины и понятия:

Детерминант. Определитель. Минор и алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования. Обратная матрица.

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.6 (2 часа)**

**Тема: «Способы вычисления обратной матрицы. Ранг матрицы. Матричные уравнения»**

Учебные цели:

1. Закрепить необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
2. Научиться вычислять обратную матрицу двумя способами, определять ранг матрицы.
3. Научиться делать проверку (закрепить определение обратной матрицы).
4. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Невырожденная матрица. Единичная матрица. Определитель квадратной матрицы. Элементарные преобразования.

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.7 (2 часа)**

**Контрольная работа №2 по теме: "Матрицы и определители"**

Учебные цели:

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях №1.4-1.7
2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

Основные термины и понятия:

см. практические занятия №1.4-1.7.

**Тема 1.3. Системы линейных уравнений**

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.8 (2 часа)**

**Тема: "Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса, метод Жордана-Гаусса"**

Учебные цели:

1. Научиться определять вид системы уравнений и правильно выбирать метод ее решения.
2. Научиться исследовать СЛУ на совместность.

3. Научиться решать СЛУ методом Гаусса и методом Жордана-Гаусса.

4. Научиться делать проверку.

Основные термины и понятия:

Совместная определенная СЛУ. Совместная неопределенная СЛУ. Несовместная СЛУ. Основная матрица системы. Расширенная матрица системы. Элементарные преобразования. Равносильные СЛУ. Базисные переменные. Свободные переменные. Общее решение СЛУ. Частное решение СЛУ.

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.9 (2 часа)**

**Тема: "Матричная форма записи СЛУ. Метод обратной матрицы. Правило Крамера"**

Учебные цели:

1. Научиться записывать и решать СЛУ в матричном виде (методом обратной матрицы).

2. Научиться решать СЛУ по правилу Крамера.

3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Невырожденная матрица. Определитель матрицы. Обратная матрица

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.10 (2 часа)**

**Контрольная работа №3 по теме: "Системы линейных уравнений"**

Учебные цели:

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях №1.8-1.9.

2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

Основные термины и понятия:

см. практические занятия №1.8-1.9.

## **РАЗДЕЛ2 (1 семестр)**

**Тема 2.1. Алгебраические структуры. Группа. Кольцо. Поле**

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.1-2.4 (8 часов)**

**Тема: "Группа. Кольцо. Поле"**

Учебные цели:

1. Закрепить свойства алгебраических операций.

2. Научиться приводить примеры алгебраических структур (группа, кольцо, поле).

3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

4. Тестирование №1.

Основные термины и понятия:

Алгебраические операции и их свойства (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Алгебраическая структура. Нейтральные и симметричные элементы. Группа. Кольцо. Поле.

**Тема 2.2. Арифметическое векторное пространство над полем**

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.5 (2 часа)**

**Тема: "Базис векторного пространства"**

Учебные цели:

1. Уметь определять, является ли заданное множество векторным пространством.

2. Освоить понятия линейной зависимости и независимости системы векторов.

3. Изучить различные способы определения линейной зависимости (независимости) системы векторов.

4. Научиться определять размерность векторного пространства и базис системы векторов.
  5. Фундаментальная система решений как базис пространства решений системы однородных линейных уравнений
  6. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
- Основные термины и понятия:  
Векторное пространство. Размерность пространства. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Базис векторного пространства.

### **Тема 2.3. Бинарные отношения**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2.6–2.7 (4 часов)**

##### **Тема: "Бинарные отношения"**

###### Учебные цели:

1. Освоить понятие "бинарные отношения".
2. Изучить способы задания бинарных отношений.
3. Научиться определять вид бинарного отношения.
4. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
5. Тестирование №1 по теме "Бинарные отношения"

###### Основные термины и понятия:

Бинарные отношения. Представление бинарных отношений графами. Виды бинарных отношений на заданном множестве: рефлексивное, антирефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное; отношение эквивалентности, отношение порядка. Фактор-множество.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.8 (2 часа)**

##### **Контрольная работа №4 по теме: "Алгебраические структуры и бинарные отношения"**

###### Учебные цели:

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях №2.1 - 2.7.
2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

###### Основные термины и понятия:

См. практические занятия №2.1 - 2.7.

## **РАЗДЕЛ 3 (2 семестр)**

### **Тема 3.1. Комплексные числа**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3.1-3.3. (6 часов)**

##### **Тема: "Комплексные числа"**

###### Учебные цели:

1. Освоить различные формы записи комплексного числа.
2. Изучить операции над комплексными числами.
3. Закрепить геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
4. Научиться находить корни  $n$ -ой степени из 1.
5. Научиться находить корни  $n$ -ой степени из произвольного комплексного числа.
6. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
7. Самостоятельная работа №1 по теме "Комплексные числа" (1 час)

###### Основные термины и понятия:

Полярная система координат. Модуль комплексного числа. Сопряженные

комплексные числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Формула Эйлера.

### **Тема 3.2. Алгебраические структуры и системы. Изоморфизм. Гомоморфизм**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3.4-3.6. (6 часов)**

**Тема: "Морфизмы алгебр"**

Учебные цели:

1. Закрепить свойства различных видов морфизмов алгебр.
2. Научиться приводить примеры изоморфных алгебраических структур.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Гомоморфизм. Эпиморфизм. Мономорфизм. Изоморфизм.

## **РАЗДЕЛ 4 (2 семестр)**

### **Тема 4.1. Линейное (векторное) пространство.**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4.1-4.2 (4 часа)**

**Тема: "Преобразование векторов линейного пространства при изменении базиса"**

Учебные цели:

1. Научиться строить матрицу перехода от старого базиса к новому.
2. Научиться определять координаты вектора в новом базисе, зная его координаты в старом базисе. Уметь решать обратную задачу.
3. Научиться определять базис и размерность подпространства линейного пространства.
4. Научиться определять сумму и пересечение подпространств.
5. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Матрица перехода. Координаты вектора в новом базисе. Линейное подпространство. Размерность линейного подпространства. Линейно-независимая система векторов. Базис линейного подпространства. Линейная оболочка векторов. Прямая сумма подпространств. Сумма и пересечение линейных подпространств.

### **Тема 4.2. Изоморфизм линейных пространств**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4.3 (2 часа)**

**Тема: "Изоморфизм линейных пространств"**

Учебные цели:

1. Закрепить свойства различных видов морфизмов линейных пространств.
2. Научиться приводить примеры изоморфных линейных пространств.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Гомоморфизм. Эпиморфизм. Мономорфизм. Изоморфизм.

## **РАЗДЕЛ 5 (3 семестр)**

### **Тема 5.1. Евклидовы векторные пространства**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5.1-5.4 (8 часов)**

**Тема: "Евклидово пространство"**

Учебные цели:

1. Освоить основные понятия темы "Евклидово пространство".
2. Научиться находить скалярное умножение векторов в разных базисах.
3. Научиться находить ортонормированный базис евклидова пространства.

4. Изучить процесс ортогонализации.
5. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
6. Самостоятельная работа № 2 по темам занятий 5.1 - 5.4 (1 час).

Основные термины и понятия:

Скалярное умножение в векторном пространстве. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Ортонормированный базис евклидова пространства.

**Тема 5.2. Линейные операторы**

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5.5-5.6 (4 часа)**

**Тема: "Примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора"**

Учебные цели:

1. Научиться приводить примеры линейных операторов.
2. Научиться строить матрицу линейного оператора в разных базисах для разных линейных пространств. Научиться находить образ вектора.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Линейное пространство. Линейный оператор. Линейное отображение. Образ вектора. Прообраз вектора. Образ пространства. Базис пространства. Тожественное преобразование. Обратное преобразование.

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5.7 (2 часа)**

**Тема: "Образ и ядро линейного оператора"**

Учебные цели:

1. Научиться находить базис ядра и базис образа линейного оператора по заданной матрице оператора (в фиксированном базисе).
2. Научиться определять размерность ядра и образа линейного оператора различными способами.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Однородная система линейных уравнений. Матрица оператора. Ранг матрицы. Базис пространства.

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5.8 (2 часа)**

**Тема: "Матрица линейного оператора в новом базисе"**

Учебные цели:

1. Научиться строить матрицу линейного оператора в старом базисе, если известна его матрица в старом базисе.
2. Научиться строить матрицу оператора в старом базисе, если известны образы векторов нового базиса.
3. Научиться строить матрицу линейного оператора по заданной формуле отображения.
4. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Матрица перехода. Связь между матрицами линейного оператора относительно различных базисов. Образ вектора. Базис. Матричное уравнение.

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5.9 (2 часа).**

**Контрольная работа №4 по теме: "Линейные операторы"**

Учебные цели:

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях №5.1-5.8.
2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

Основные термины и понятия:

См. практические занятия №5.1-5.8.

### **Тема 5.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5.10-5.11 (4 часа)**

**Тема: "Собственные значения и собственные векторы линейного оператора"**

Учебные цели:

1. Научиться находить собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

2. Научиться приводить матрицу линейного оператора к диагональному виду в базисе из собственных векторов.

3. Научиться находить матрицу оператора в старом базисе, если известны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора.

4. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

5. Самостоятельная работа №3.

Основные термины и понятия:

Характеристическое уравнение. Собственное значение. Собственный вектор. Базис из собственных векторов. Диагональная матрица. Матрица перехода. Обратная матрица.

## **РАЗДЕЛ 6 (3 семестр)**

### **Тема 6.1. Квадратичные формы**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6.1-6.3 (6 часа)**

**Тема: "Квадратичные формы"**

Учебные цели:

1. Научиться находить матрицу квадратичной формы.

2. Научиться приводить квадратичную форму к каноническому виду методом выделения полного квадрата.

3. Научиться находить линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

4. Научиться приводить квадратичную форму к нормальному виду.

5. Научиться исследовать квадратичную форму на знакоопределенность разными способами.

6. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Линейное преобразование. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Конгруэнтные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6.4-6.5 (4 часа).**

**Тема: "Приведение квадратичной формы к главным осям"**

Учебные цели:

1. Научиться приводить квадратичную форму к главным осям.

2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Ортогональное преобразование. Характеристическое уравнение. Собственное значение. Собственный вектор. Ортонормированный базис из собственных векторов.

### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6.6 (2 часа)**

#### **Самостоятельная работа № 5 по теме: "Квадратичные формы"**

##### **Учебные цели:**

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях № 6.1-6.5.
2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.
3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

##### **Основные термины и понятия:**

См. практические занятия № 6.1-6.5.

## **РАЗДЕЛ 7 (4 семестр)**

### **Тема 7.1. Многочлены от одной переменной над полем. Кольцо многочленов**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7.1-7.2 (4 часа)**

##### **Тема: "Многочлены от одной переменной над полем. Алгоритм Евклида"**

##### **Учебные цели:**

1. Научиться делить с остатком в кольце многочленов над полем  $P$ .
2. Приобрести навыки нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов, используя алгоритм Евклида.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

##### **Основные термины и понятия:**

Многочлен от одной переменной над полем  $P$ . Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7.3-7.4 (4 час)**

##### **Тема: "Неприводимые многочлены над полем"**

##### **Учебные цели:**

1. Освоить понятия "приводимые" и "неприводимые" многочлены над полем  $P$ .
2. Научиться находить корни (кратные корни) многочлена, используя схему Горнера и теорему Безу.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

##### **Основные термины и понятия:**

Приводимые и неприводимые многочлены над полем  $P$ . Схема Горнера. Теорема Безу.

### **Тема 7.2. Многочлены над полем рациональных чисел**

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7.5-7.7 (6 часа)**

##### **Тема: "Многочлены от одной переменной над полем рациональных чисел"**

##### **Учебные цели:**

1. Научиться находить "кандидатов на звание корня многочлена" над полем рациональных чисел (и сужать круг "кандидатов").
2. Подготовка к контрольной работе № 6.
3. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

##### **Основные термины и понятия:**

Приводимые и неприводимые многочлены над полем рациональных чисел.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7.8 (2 часа)**

##### **Контрольная работа № 6 по теме: "Многочлены от одной переменной над полем рациональных чисел"**

##### **Учебные цели:**

1. Закрепить умения и навыки, приобретенные на практических занятиях №7.1-7.7.
2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

3. Для преподавателя: выявить недостатки самостоятельной подготовки каждого студента при изучении тем дисциплины.

Основные термины и понятия:

См. практические занятия №7.1-7.7.

**Тема 7.3. Многочлены над полем действительных и над полем комплексных чисел**  
**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7.9- 7.12 (8 часа)**

**Тема: "Решение уравнений 3-й и 4-й степени в радикалах"**

Учебные цели:

1. Научиться раскладывать многочлены 3-й и 4-й степеней (над полем  $P$ ) на неприводимые множители.

2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

3. Самостоятельная работа № 5

Основные термины и понятия:

Метод Феррари. Метод резольвенты. Формула Кардано.

**РАЗДЕЛ 8 (3 семестр)**

**Тема 8.1. Элементы теории конечных полей**

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8.1-8.2 (4 часа)**

**Тема: "Многочлены от одной переменной над конечным полем"**

Учебные цели:

1. Освоить вычисления в кольце классов вычетов.

2. Научиться приводить примеры конечных полей.

3. Научиться находить сумму, разность, произведение, частное и НОД многочленов над конечным полем.

4. Научиться находить все значения (и корни) многочленов над конечным полем.

5. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

Основные термины и понятия:

Вычеты по модулю простого числа. Поле классов вычетов по модулю простого числа. Характеристика поля. Циклическая группа. Идеал. Многочлен от одной переменной над полем  $P$ . Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

**Тема 8.2. Многочлены от нескольких переменных**

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8.3-8.6 (8 часа)**

**Тема: "Многочлены от нескольких переменных"**

Учебные цели:

1. Применение симметрических многочленов к решению олимпиадных задач.

2. Научиться логически верно выстраивать устную и письменную речь.

3. Тестирование по теме "Элементы теории конечных полей"

Основные термины и понятия: Симметрические многочлены. Результант.

**5.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

1. Орлова И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И.В. Орлова, В.В. Угрозов, Е.С. Филонова. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 370с. - Режим доступа: <https://bibli-online.ru/viewer/lineynaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya-dlya-ekonomistov-432810#>

2.Кашапова Ф.Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах: учеб.пособие для академического бакалавриата / Ф.Р. Кашапова, И.А. Кашапов, Т.Н. Фоменко. - 2 изд.,



перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 171с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/vyshshaya-matematika-obschaya-algebra-v-zadachah-411431#page/2>

3. Ларин С.В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля: учеб.пособие для академического бакалавриата / С.В. Ларин. - 2 изд., испр. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 160 с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/algebra-i-teoriya-chisel-gruppy-kolca-i-polya-441295#>

4. Ларин С.В. Алгебра : многочлены: учеб.пособие для академического бакалавриата / С.В. Ларин. - 2 изд., испр. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 136с.— Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/algebra-mnogochleny-441297#>

### Задания для организации самостоятельной работы обучающихся

#### Раздел 1

1. Вычислите определители:

$$a. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}, б. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; в. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

2. Вычислите:

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$b. \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$c. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 6) + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

3. Решите следующие однородные системы линейных уравнений. Найдите фундаментальную систему решений.

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

4. Решите систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

## Раздел 2

### Тема: Группы

Какие из следующих множеств являются группами относительно сложения:  $Z, N, Q$ ?

1. Какие из следующих множеств являются группами относительно умножения:  $R, Z$ ?

### Тема: Векторное пространство

1. Вычислите линейные комбинации векторов

$$a_1 = (-1, 0, 1, 0), a_2 = (-3, 2, 0, 1), a_3 = (2, -2, 1, -1), a_4 = (0, 2, -3, 1):$$

$$\begin{array}{ll} a_1 + a_2 + a_3 + a_4, & a_1 - a_2 - a_3 + a_4, \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4, & \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 \\ 3a_1 + a_2 + 3a_3 + 2a_4 & \end{array}$$

2. Найдите вектор  $x$  из уравнения  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + x = o$ . Векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4$  заданы в №5

3. Укажите два различных набора чисел  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  таких, что  $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 = o$ . Векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4$  из №5.

4. Для векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  из № 1 запишите следующие условия в виде систем линейных уравнений относительно переменных  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ :

- $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 = o$ ;
- $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = o$ ;
- $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = (-11, 2, 7, -3)$ ;
- $\mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 = a_1$ .

### Тема: Бинарные отношения

1. Бинарное отношение  $R$  - "x кратно y" на множестве  $X = \{1, 2, 6\}$ .

- построить граф и график бинарного отношения,
- проверить выполнимость всех свойств бинарных отношений.

2. Бинарное отношение  $R$  - "x больше y" на множестве  $X = \{1, 2, 6\}$ .

- построить граф и график бинарного отношения,
- проверить выполнимость всех свойств бинарных отношений.

3. Бинарное отношение  $R$  - "x не меньше y" на множестве  $X = \{1, 2, 6\}$ .

- построить граф и график бинарного отношения,
- проверить выполнимость всех свойств бинарных отношений.

4. Бинарное отношение  $R$  - "x перпендикулярна y" на множестве всех прямых. Проверить выполнимость всех свойств бинарных отношений.

5. Бинарное отношение  $R$  - "x параллельна y" на множестве всех прямых. Проверить выполнимость всех свойств бинарных отношений.

## Раздел 3

## Тема: Комплексные числа

1. Вычислите:

- a.  $(3 - 2i) + (5 + 3i)$ ;
- b.  $(1 + 2i) - (3 - i)$ ;
- c.  $(2 - i) \cdot (1 - i)$ ;
- d.  $(1 + 3i)(-7 + 2i)$ ;
- e.  $(2 - i)^2$ ;
- f.  $(1 + 2i)^3$ .

2. Вычислите:

- a.  $i^{13}$ ;
- b.  $i^{65}$ ;

3. Найдите  $z^{-1}$ , если:

- a.  $z = 7 - 12i$ ;
- b.  $z = 3 + 4i$ ;
- c.  $z = -3 + 7i$ ;
- d.  $z = i$ .

4. Вычислите:

- a.  $(1 + i)^{12}$ ;
- b.  $(1 - i)^8$ .

5. Найдите сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразите геометрически данные числа и результаты действий.

- a.  $z_1 = -2 + i$ ,  $z_2 = 3 - i$ ;
- b.  $z_1 = -3$ ,  $z_2 = 4i$ .

6. Даны числа  $z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ ,  $z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ .

Вычислите: а)  $z_1 z_2$ ; б)  $\frac{z_1}{z_2}$ .

## Раздел 5

**Задание 1.** Примените процесс ортогонализации к следующим системам векторов:

а)  $\begin{pmatrix} 1,0,2,3, \\ 0,1,0,1, \end{pmatrix}$

б)  $\begin{pmatrix} 1,1,2,1, \\ 0,1,0,1, \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} 1,-1,1,-1, \\ 1,0,2,3, \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} 1,-1,1,-1, \\ -1,1,-1,1,-1, \end{pmatrix}$

**Задание 2.** Найти матрицу линейного оператора, отображающего базис  $c_1 = (2,3), c_2 = (1,1)$  в систему векторов  $b_1 = (1,2), b_2 = (-1,1)$ .

**Задание 3.** Найти размерность и базис образа и ядра оператора заданного матрицей  $A$ . Найти все собственные числа и собственные векторы для линейного оператора с матрицей  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Задание 4.** Найти матрицу линейного оператора, для которого собственными числами являются 1, 2 и 3, а собственными векторами соответственно  $a_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $a_2 = (1, 0, 3)$ ,  $a_3 = (0, 1, 2)$ .

**Задание 5.** Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Раздел 6

**Задание 1.** Привести квадратичную форму к каноническому виду (выделить полный квадрат), к нормальному виду. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность. Записать линейные преобразования, переводящие заданную квадратичную форму к каноническому и к нормальному виду.

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 2xz.$$

### Раздел 7

1. Разделите с остатком первый многочлен на второй (2 способа):

1)  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ,  $g(x) = x - 1$ ;

2)  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ ,  $g(x) = x - 3$ ;

3)  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ ,  $g(x) = x + 2$ ;

4)  $f(x) = 4x^5 + 2x^3 - x$ ,  $g(x) = 2x + 1$ .

2. Найдите наибольший общий делитель двух многочленов:

$$5x + 3, 2x - 1; 3x + 5, 5x - 7; x^2 + 3, 2x^2 - 1; x^3 + 1, x^2 - 1.$$

3. Найдите значение многочлена в точке  $a$ :

$$x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = 1; x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = -1;$$

$$x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = 2; x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = i;$$

$$x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = 1 - i.$$

4. Разложите многочлен по степеням  $x - a$ :

$$x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = 1; x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = -1; x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = 2;$$

$$x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = i; x^6 + 3x^5 - 4x^2 + x - 2, a = 1 - i.$$

5. Разложите многочлен по степеням  $x$ :

а.  $(x + 3)^4 - (x + 3)^3 + 1$ ;

б.  $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$ .

6. Ответьте на вопрос. Чему равен показатель кратности корня:

с.  $x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, c = 2$ ;

д.  $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ ?

7. Решите уравнения:  $x^3 - 3x + 2 = 0$ ;  $x^4 + 12x + 3 = 0$ .

8. Найдите рациональные корни многочленов:

а.  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ ;

- b.  $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ ;
- c.  $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ ;
- d.  $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ ;
- e.  $24x^5 - 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ .

## Раздел 8

1. Выразите следующие симметрические многочлены через основные симметрические:
  - a.  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ ;
  - b.  $x_1^5 + x_2^5$ ;
  - c.  $x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^3 + x_2^2 x_3^3$ .
2. Найдите все значения многочленов над  $Z_2$  :
  - a.  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ ;
  - b.  $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ ;
  - c.  $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ ;
  - d.  $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ ;
  - e.  $24x^5 - 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ .
3. Найти сумму, разность и произведение многочленов  $f(x) = 1 - 3x + 4x^2$ ,  $g(x) = 3 + 2x + x^2$  из кольца  $Z_5[x]$ .
4. Над полем  $F_5$  найти частное и остаток от деления многочлена  $2 + 3x + 3x^2$  на многочлен  $3 + 2x$ .

### 6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации приведен в приложении

### 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

*Перечень основной учебной литературы:*

1. Кашапова Ф.Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах: учеб. пособие для академического бакалавриата / Ф.Р.Кашапова, И.А. Кашапов, Т.Н. Фоменко. - 2 изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 171с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/vysshaya-matematika-obschaya-algebra-v-zadachah-411431#page/2>
2. Ларин С.В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля: учеб.пособие для академического бакалавриата / С.В. Ларин. - 2 изд., испр. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 160 с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/algebra-i-teoriya-chisel-gruppy-kolca-i-polya-441295#>
3. Ларин С.В. Алгебра : многочлены: учеб.пособие для академического бакалавриата / С.В. Ларин. - 2 изд., испр. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 136с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/algebra-mnogochleny-441297#>

*Перечень дополнительной литературы:*

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник и практикум для

прикладного бакалавриата / А.И. Иванов, В.В. Логинова, А.В. Морозова, Е.Г. Плотникова: под ред. Е.Г. Плотниковой. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 340с. - Режим доступа:

<https://biblio-online.ru/viewer/lineynaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya-436467#>

2. Потапов А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А.П. Потапов. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 310с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/lineynaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya-433646#>

3. Фоменко Т.Н. Высшая математика. Общая алгебра. Элементы тензорной алгебры: учебник и практикум для академического бакалавриата / Т.Н. Фоменко. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 121с. - Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/vyshshaya-matematika-obshchaya-algebra-elementy-tenzornoj-algebry-441134#page/2>

4. Бугров Я.С. Высшая математика: в 3т. Том 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - 7-е изд., стереотипное. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 281с. - Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/vyshshaya-matematika-v-3-t-t-2-elementy-lineynoy-algebry-i-analiticheskoy-geometrii-431960#>

5. Сухотин А.М. Высшая математика. Альтернативная методология преподавания: учеб.пособие для прикладного бакалавриата / А.М. Сухотин, Т.В. Тарбокова. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 223с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/vyshshaya-matematika-alternativnaya-metodologiya-prepodavaniya-433933#page/2>

6. Орлова И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И.В. Орлова, В.В. Угрозов, Е.С. Филонова. - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 370с. - Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/lineynaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya-dlya-ekonomistov-432810#>

## **8.Перечень современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем**

Все обучающиеся обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, которые подлежат обновлению при необходимости, что отражается в листах актуализации рабочих программ.

### **Современные профессиональные базы данных:**

1. Федеральный портал "Российское образование": [www.edu.ru](http://www.edu.ru)
2. "Университетская библиотека online" <http://biblioclub.ru/>
3. Электронная библиотечная система "Юрайт" <http://biblio-online.ru/>
4. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://edu-top.ru/katalog/>
5. Московский центр непрерывного математического образования: <https://mccme.ru/>
6. Национальный открытый университет "Интуит". Математика: курсы: [https://www.intuit.ru/studies/courses?service=0&option\\_id=20&service\\_path=1](https://www.intuit.ru/studies/courses?service=0&option_id=20&service_path=1)
7. Линейная алгебра и геометрия: ресурсы. // <https://online.edu.ru/ru/courses/item/?id=554>
8. Высшая математика. Линейная алгебра и элементы топологии: ресурсы <https://online.edu.ru/ru/courses/item/?id=65>
9. Высшая математика. Алгебра: введение в теорию групп: ресурсы <https://online.edu.ru/ru/courses/item/?id=159>

### **Информационные справочные системы:**

<https://yandex.ru/> , <https://www.google.ru/>

## **9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине имеется в наличии следующая материально-техническая база:

Аудитории	Программное обеспечение
<ul style="list-style-type: none"> <li>- учебная аудитория для проведения учебных занятий по дисциплине, оснащенная компьютером с выходом в интернет, мультимедиа проектором;</li> <li>- помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ГГТУ;</li> <li>- специализированная аудитория для проведения лабораторных работ по дисциплине, оснащенная набором реактивов и лабораторного оборудования;</li> </ul>	<p>Операционная система            Пакет офисных приложений            Браузер Firefox, Яндекс</p>

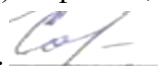
### 10. Обучение инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости рабочая программа дисциплины может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

Авторы (составители): к.ф.-м.н., доцент Сачкова Е.Н.



ст.пр. Солдатова Н.Г.



подписи авторов

Программа одобрена на заседании кафедры математики и экономики 26.06.2023 г, протокол №7.

Зав. кафедрой



Каменских Н.А.

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ  
АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Б1.О.07.01**

**Алгебра**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.01 Педагогическое образование</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2023 г.**



## 1.Индикаторы достижения компетенций

Код и наименование универсальной компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	<b>ПК-1.1</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета). <b>ПК-1.2</b> Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО. <b>ПК-1.3</b> Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.

## 2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оценка уровня освоения компетенции на разных этапах их формирования проводится на основе дифференцированного контроля каждого показателя компетенции в рамках оценочных средств, приведенных в ФОС.

Оценка "отлично", "хорошо" соответствует повышенному уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенным в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка "удовлетворительно" соответствует базовому уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенным в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка "неудовлетворительно" соответствует показателю "компетенция не освоена".

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде	Критерии оценивания
1	2	3	4	5
<i>Оценочные средства для проведения текущего контроля</i>				
1	<i>Тест</i>	Система стандартизированных заданий, позволяющая измерить уровень знаний и умений обучающегося.	Тестовые задания	<p>Оценка «Отлично» выставляется за тест, в котором выполнено более 90% заданий.</p> <p>Оценка «Хорошо» выставляется за тест, в котором выполнено более 75 % заданий.</p> <p>Оценка «Удовлетворительно» выставляется за тест, в котором выполнено более 60 % заданий.</p> <p>Оценка «Неудовлетворительно» выставляется за тест, в котором выполнено менее 60 % заданий.</p>
2	<i>Контрольная (самостоятельная) работа</i>	Контрольные работы проводятся с целью определения конечного результата в обучении по данной теме или разделу, позволяют контролировать знания, умения и владения изученного материала	Перечень контрольных заданий	<p>Оценка «Отлично»- контрольная работа оформлена в строгом соответствии с изложенными требованиями; показан высокий уровень знания изученного материала по заданной теме, умение глубоко анализировать проблему и делать обобщающие выводы; работа выполнена грамотно с точки зрения поставленной задачи, т.е. без ошибок и недочетов.</p> <p>Оценка «Хорошо»-работа оформлена в соответствии с изложенными требованиями; показан достаточный уровень знания изученного материала по заданной теме, умение анализировать проблему и делать выводы; работа выполнена полностью, но имеются недочеты.</p> <p>Оценка «Удовлетворительно»- при оформлении работы допущены незначительные отклонения от изложенных требований; показаны минимальные знания по основным темам контрольной работы; выполнено не менее половины работы.</p> <p>Оценка «Неудовлетворительно»-</p>

				выполнено менее половины работы, допущены ошибки при выполнении заданий.
<i>Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации</i>				
3	Экзамен	Контрольное мероприятие, которое проводится по окончании изучения дисциплины в виде, предусмотренном учебным планом.	Вопросы к экзамену	<p>Оценка «отлично» предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– знание понятийно-терминологического аппарата дисциплины: состав и содержание научных понятий, их связей между собой, их систему;</li> <li>– знание теории вопроса, умение анализировать проблему;</li> <li>– умение применять основные положения теории вопроса, аналитическое изложение научных идей отечественных и зарубежных ученых;</li> <li>– умение содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса;</li> <li>– глубокое понимание, осознание материала.</li> </ul> <p>Оценка «хорошо» предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– знание основных теоретических положений вопроса;</li> <li>– умение анализировать изучаемые дисциплиной явления, факты, действия;</li> <li>– умение содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса. Но имеет место недостаточная полнота по излагаемому вопросу.</li> </ul> <p>Оценка «удовлетворительно» предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– неполноту изложения информации;</li> <li>– оперирование понятий на бытовом уровне;</li> <li>– отсутствие связи в построении ответа;</li> <li>– неумение выделить главное;</li> <li>– отсутствие выводов.</li> </ul> <p>Оценка «неудовлетворительно» предполагает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– незнание понятийного аппарата;</li> <li>– незнание методологических основ проблемы;</li> <li>– незнание теории и истории</li> </ul>

				вопроса; - отсутствие умения анализировать учебный материал.
4	<i>Зачет</i>	Контрольное мероприятие, которое проводится по окончании изучения дисциплины.	Вопросы к зачету	«Зачтено»: знание теории вопроса, понятийно-терминологического аппарата дисциплины (состав и содержание понятий, их связей между собой, их систему); умение анализировать проблему, содержательно и стилистически грамотно излагать суть вопроса; владение аналитическим способом изложения вопроса, навыками аргументации. «Не зачтено»: знание вопроса на уровне основных понятий; умение выделить главное, сформулировать выводы не продемонстрировано; владение навыками аргументации не продемонстрировано.

**3. Типовые контрольные задания и/или иные материалы для проведения текущего контроля знаний, промежуточной аттестации, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и/или опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

**Тестовые задания**

1. Изучение какого множества чисел следует начать с рассмотрения уравнения  $x^2+1=0$ ? (выберите один вариант ответа)
  - а. Множество целых чисел
  - б. Множество действительных чисел
  - в. Множество комплексных чисел
  - г. Множество натуральных чисел
  
2. В средней школе обучающиеся знакомятся с основами теории множеств. Объекты, из которых образовано множество, являются (выберите один вариант ответа)
  - а. составляющими множества
  - б. элементами множества
  - в. составом множества
  - г. совокупностью
  
3. Школьная программа для 11 классов с углубленным изучением математики предполагает рассмотрение темы «Матричная алгебра». Среди перечисленных ниже утверждений выберите те, которые учитель использует при ознакомлении обучающихся с операциями над матрицами (выберите несколько вариантов ответов).
  - а. Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров
  - б. Операция сложения матриц вводится только для матриц разных размеров
  - в. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов второй матрицы равно числу строк первой матрицы

г. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы

4. Среди предложенных ниже видов задач выберите те, которые следует использовать учителю при объяснении темы «Разложение многочленов на множители» (выберите несколько вариантов ответов):

- а. задачи на вынесение общего множителя за скобки
- б. задачи на применение способа группировки
- в. задачи на рассмотрение арифметических операций над одночленами
- г. задачи на разложение многочлена с помощью формул сокращенного умножения

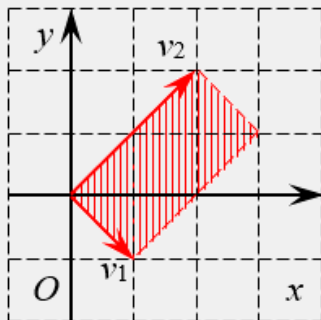
5. При углубленном изучении математики старшекласники знакомятся с видами матриц. Сопоставьте обозначение и название видов матриц.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$	а. диагональная матрица
2. $\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$	б. нижняя треугольная матрица
3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$	в. верхняя треугольная матрица
4. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$	г. единичная матрица

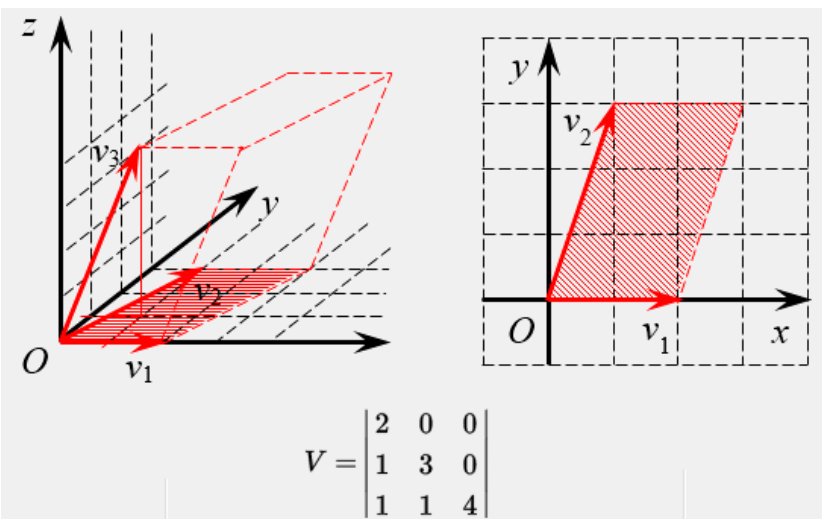
6. При решении квадратных уравнений (базовый курс математики), а также при решении уравнений высших степеней (углубленный курс математики) в школе обучающиеся должны уметь находить \_\_\_\_\_ уравнений с помощью формул Виета.

7. При углубленном изучении математики в 11 классе, рассказывая о геометрическом смысле \_\_\_\_\_, учитель может использовать следующие дидактические материалы:

параллелограмм построен на векторах  $v_1 = (1; -1)$  и  $v_2 = (2; 2)$



$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$



$$V = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

8. В соответствии с государственным образовательным стандартом для 5-6 классов учащиеся должны уметь приводить примеры конечных и бесконечных множеств, находить объединение и пересечение конкретных множеств, иллюстрировать отношения между множествами с помощью диаграмм \_\_\_\_\_-Венна.

9. Углубленный уровень освоения курса школьной математики предполагает знакомство учащихся с такими формами записи комплексного числа, как геометрическая, алгебраическая и \_\_\_\_\_.

10. В процессе освоения углубленного школьного курса математики обучающиеся знакомятся с квадратными таблицами чисел, называемыми \_\_\_\_\_, и учатся вычислять и применять соответствующие им числа, называемые определителями. (Слова использовать в нужном числе и падеже)

#### Ключи

1.	в
2.	б
3.	а, г
4.	а, б, г
5.	1. г; 2. б; 3.в; 4. а
6.	корни
7.	определителя
8.	Эйлера
9.	тригонометрическая
10.	матрицами

## Тестовые задания по теме 2.1. Алгебраические структуры. Группа. Кольцо. Поле

1. Определите, какое из следующих множеств является полем (кольцом) относительно стандартных операций.
  - А) Множество целых чисел.
  - Б) Множество рациональных чисел.
  - В) Множество квадратных матриц второго порядка.
  - Г) Множество невырожденных матриц второго порядка.
2. На множестве целых (вещественных, рациональных) чисел элемент, обратный числу  $N$ 
  - А) равен  $(-N)$ ,
  - Б) равен  $1/N$ ,
  - В) не существует
3. На множестве целых (вещественных, рациональных) чисел элемент, противоположный числу  $N$  ....
  - А) равен  $(-N)$ ,
  - Б) равен  $1/N$ ,
  - В) не существует
4. Нейтральный элемент на множестве квадратных матриц второго порядка относительно операции сложения - ....
  - А) единичная матрица,
  - Б) нулевая матрица,
  - В) не существует,
5. Нейтральный элемент на множестве квадратных матриц второго порядка относительно операции умножения - ....
  - А) единичная матрица,
  - Б) нулевая матрица,
  - В) не существует,
6. На множестве целых (рациональных, вещественных) чисел симметричный элемент относительно операции умножения (сложения) для числа  $N$  ...
  - А) равен  $1/N$ ,
  - Б) равен  $(-N)$ ,
  - В) равен  $1$ ,
  - Г) равен  $0$ ,
  - Д) не существует.
7. Определите, какое из следующих множеств является группой относительно операции сложения (умножения).
  - А) Множество целых чисел.
  - Б) Множество рациональных чисел.
  - В) Множество квадратных матриц второго порядка.
  - Г) Множество невырожденных матриц второго порядка.

## Тестовые задания по теме 2.3. Бинарные отношения

1. Бинарное отношение  $R$  - "x кратно y" на множестве  $X = \{1, 2, 3, 5, 7, N+10\}$  обладает следующими свойствами:
  - а) симметричность,
  - б) антисимметричность,
  - в) транзитивность,
  - г) рефлексивность,
  - д) антирефлексивность.
2. Бинарное отношение  $R$  - "x больше y" на множестве  $X = \{1, 2, 3, 5, 7, N+10\}$  обладает следующими свойствами:

- а) симметричность,
  - б) антисимметричность,
  - в) транзитивность,
  - г) рефлексивность,
  - д) антирефлексивность.
3. Бинарное отношение  $R$  - " $x$  не меньше  $y$ " на множестве  $X = \{1, 2, 3, 5, 7, N+10\}$  обладает следующими свойствами:
- а) симметричность,
  - б) антисимметричность,
  - в) транзитивность,
  - г) рефлексивность,
  - д) антирефлексивность.
4. Бинарное отношение  $R$  - " $x$  перпендикулярна  $y$ " на множестве всех прямых обладает следующими свойствами:
- а) симметричность,
  - б) антисимметричность,
  - в) транзитивность,
  - г) рефлексивность,
  - д) антирефлексивность.
5. Бинарное отношение  $R$  - " $x$  параллельна  $y$ " на множестве всех прямых обладает следующими свойствами:
- а) симметричность,
  - б) антисимметричность,
  - в) транзитивность,
  - г) рефлексивность,
  - д) антирефлексивность.

### Тестовые задания по теме 8.1. Элементы теории конечных полей

1. Вычеты по модулю 4 образуют поле?
  - а) Да б) Нет
2. Вычеты по модулю 3 образуют поле?
  - а) Да б) Нет
3. Характеристика поля  $F_3$  равна...
  - а) 3, б) 0, в) 1, г) 2.
4. Число многочленов над полем  $F_3$  не выше второй степени равно...
  - а) 27, б) 9, в) 3, г) 81.
5. Число многочленов над полем  $F_2$  не выше второй степени равно...
  - а) 16, б) 2, в) 4, г) 8, д) 32.
6.  $f = x^4 + 3x^3 - 3x + 2; f \in Z_7[x]. f(-3) = \dots$ 
  - а) 4, б) 11, в) свой вариант ответа.
7. Сумма многочленов  $f(x) = 1 - 3x + 4x^2, g(x) = 3 + 2x + x^2$  из кольца  $Z_5[x]$  равна...
  - а)  $4 + 4x$ , б)  $3 + 3x^2$ , в)  $4x^4 + 2x^2 + 3 + 3x$ , г) нет правильного ответа
8. Разность многочленов  $f(x) = 1 - 3x + 4x^2, g(x) = 3 + 2x + x^2$  из кольца  $Z_5[x]$  равна...
  - а)  $4 + 4x$ , б)  $3 + 3x^2$ , в)  $4x^4 + 2x^2 + 3 + 3x$ , г) нет правильного ответа
9. Произведение многочленов  $f(x) = 1 - 3x + 4x^2, g(x) = 3 + 2x + x^2$  из кольца  $Z_5[x]$  равно...
  - а)  $4 + 4x$ , б)  $3 + 3x^2$ , в)  $4x^4 + 2x^2 + 3 + 3x$ , г) нет правильного ответа



## Перечень контрольных заданий

### Контрольная работа № 1: Элементы теории множеств

#### Вариант 1

1. Проверить является ли формула тавтологией, противоречием, нейтральной формулой?

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow r)$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (x^2 + 3x + 7 > 0); B(x) \equiv (\lg(x^2 - 2) \geq 1) \text{ на } \mathbf{R}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\forall x \in \mathbf{N})(A(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow B(x))$$

4. Докажите или опровергните.

$$A \cap B = A \cap (\overline{A \cup B})$$

#### Вариант 2

1. Проверить является ли формула тавтологией, противоречием, нейтральной формулой?

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \rightarrow \neg p$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (x - \text{простое число}); B(x) \equiv (x - \text{четное число}) \text{ на } \mathbf{R}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\exists x \in \mathbf{N})(\forall y \in \mathbf{N})(A(y) \rightarrow C(x, y))$$

4. Докажите или опровергните.

$$B \cup (A \setminus B) = A \cup B$$

#### Вариант 3

1. Проверить является ли формула тавтологией, противоречием, нейтральной формулой?

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (x - \text{число кратное } 3); B(x) \equiv (x - \text{число кратное } 9); \text{ на } \mathbf{R}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\exists x, y \in \mathbf{N})(A(x) \vee B(y) \rightarrow C(x, y))$$

4. Докажите или опровергните.

$$B \cap (A \setminus B) = \emptyset.$$

#### Вариант 4

1. Эквивалентны ли формулы?

$$A = (p \wedge q) \rightarrow r \text{ и } B = p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv \left( \frac{x^2 - 9}{12} > 1 \right); B(x) \equiv (|x| < 1) \text{ на } \mathbf{Z}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\forall x \in \mathbf{N})(\exists y \in \mathbf{N})(P(y) \wedge C(x, y))$$

4. Докажите или опровергните.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

#### Вариант 5

1. Эквивалентны ли формулы?

$$A = (p \wedge r) \vee (p \wedge q); B = (p \rightarrow q) \wedge r$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (x - 5 = 0); B(x) \equiv (x - \text{кратно } 5); \text{ на } \mathbf{R}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\exists x \in N)(P(x) \wedge P(y) \wedge C(x, y) \rightarrow x = y)$$

4. Докажите или опровергните.

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

### Вариант 6

1. Эквивалентны ли формулы?

$$A = \neg(p \wedge q \wedge r); B = (p \wedge q) \vee r$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (x^2 + 12 < 1); B(x) \equiv (x \text{ - простое число}); \text{ на } \mathbf{R}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\forall x, y \in N)(P(x) \wedge P(y) \rightarrow \neg C(x, y))$$

4. Докажите или опровергните.

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

### Вариант 7

1. Проверить является ли формула тавтологией, противоречием, нейтральной формулой?

$$(p \wedge q) \rightarrow (s \wedge \neg s \rightarrow p \vee s)$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (|x| > 8); B(x) \equiv (x^2 > 66) \text{ на } \mathbf{Z}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\forall x \in N)(C(x, y) \wedge A(x) \rightarrow A(y))$$

4. Докажите или опровергните.

$$A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$$

### Вариант 8

1. Проверить является ли формула тавтологией, противоречием, нейтральной формулой?

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$$

2. Равносильны ли предикаты? Можно ли установить следствие одного из другого?

$$A(x) \equiv (x \text{ -кратно } 12); B(x) \equiv (x \text{ -кратно } 6) \text{ на } \mathbf{R}$$

3. Оцените истинность высказываний и постройте опровержение.

$$(\forall x \in N)(\exists y \in N)(C(y, x) \wedge B(x))$$

4. Докажите или опровергните.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

## Контрольная работа № 2: Матрицы и определители

### Вариант 1

1. Найти матрицу  $C^{-1}$  (рассмотреть 2 способа), обратную к матрице  $C = A^T B - 2E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 8 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решить задачу двумя способами.

3. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & -5 & 2 & -8 & -11 \\ 7 & 3 & 6 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение:  $CX = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , где  $C$  - матрица из примера 1.

### Вариант 2

1. Найти матрицу  $C^{-1}$ , обратную к матрице  $C = A^T B - 2E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решить задачу двумя способами.

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & -3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решить задачу двумя способами.

3. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 6 \\ 2 & -3 & -28 \\ 5 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение:  $CX = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , где  $C$  - матрица из примера 1.

### Вариант 3

1. Найти матрицу  $C^{-1}$ , обратную к матрице  $C = BA^T - 2E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решить задачу двумя способами.

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решить задачу двумя способами.

3. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 14 & 18 & 10 \\ 2 & -6 & -6 & 6 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение:  $CX = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , где  $C$  - матрица из примера 1.

Дополнительные задания для контрольной работы №1.

5. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Выяснить, какие из следующих операций можно выполнить:

$$A+B, \quad A^T+B, \quad A+B^T, \quad AB, \quad BA, \quad A^T B, \quad AB^T, \quad A^T B^T, \quad B^T A^T.$$

6. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:

$$а) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad б) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad в) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad г) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

7. Сколько линейно независимых строк имеет матрица  $C = (BA)^T + A^T B^T - D$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Контрольная работа № 3: Системы линейных уравнений**

Вариант 1

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса или Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера и методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение  $XA=B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ .

Вариант 2

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса или Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера и методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение  $AX=B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

### Вариант 3

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса или Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -2 \\ -3x_1 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера и методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение  $XA=B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ .

## **Контрольная работа № 4: Векторные пространства**

### Вариант 1

1. Является ли вектор  $\bar{a}_2 = (6, -6, 5, 0)^T$  линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_1 = (-2, 4, 0, 1)^T$ ,  $\bar{a}_2 = (2, -4, 3, -1)^T$ ,  $\bar{a}_3 = (1, 1, -2, 1)^T$ .

2. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Доказать, что множество многочленов степени, не превышающей 3, образует линейное пространство. Указать размерность данного пространства и привести два примера его базиса.

### Вариант 2

1. Является ли вектор  $\bar{a}_2 = (0, 2, -1, 2)^T$  линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_1 = (-2, 4, 0, 1)^T$ ,  $\bar{a}_2 = (0, -4, 3, -1)^T$ ,  $\bar{a}_3 = (1, 1, -2, 1)^T$ .

2. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Доказать, что множество квадратных матриц второго порядка образует линейное пространство. Указать размерность данного пространства и привести два примера его базиса.

### Вариант 3

1. Является ли вектор  $\vec{a}_2 = (6, -4, 1, 3)^T$  линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_1 = (1, -2, 0, 1)^T$ ,  $\vec{a}_2 = (2, 2, 3, -1)^T$ ,  $\vec{a}_3 = (1, 0, -2, 1)^T$ .

2. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Доказать, что множество геометрических векторов в трехмерном пространстве образует линейное пространство. Указать размерность данного пространства и привести пример его базиса.

### Контрольная работа № 5: Линейные операторы

#### Вариант (1N)

1. Отображение задано с помощью формулы  $A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Nx_1 + x_2 \\ x_2 - Nx_1 \end{pmatrix}$ .

а) доказать, что  $A$  - линейное отображение.

б) Найти матрицу отображения.

в) Найти образ вектора  $x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

2. Линейное отображение в старом базисе задано матрицей

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & N \\ N & -1 & 0 \\ 0 & N & -2 \end{pmatrix}.$$

а) Найти образ и ядро. Указать размерности этих подпространств и их базисы.

б) Найти матрицу отображения в новом базисе

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ N-3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ N-5 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ N^2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу линейного оператора  $A$ , если  $A\vec{a} = \vec{d}$ ,  $A\vec{b} = \vec{c}$ , где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -N \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ N \end{pmatrix}$$

#### Вариант (2N)

1. Отображение задано с помощью формулы  $A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - Nx_2 \\ Nx_2 + x_1 \end{pmatrix}$ .

а) доказать, что  $A$  - линейное отображение.

б) Найти матрицу отображения.

в) Найти образ вектора  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

2. Линейное отображение в старом базисе задано матрицей

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & N \\ N & -1 & 0 \\ 0 & N & -2 \end{pmatrix}.$$

- а) Найти образ и ядро. Указать размерности этих подпространств и их базисы.  
 б) Найти матрицу отображения в новом базисе

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ N-4 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ N-2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ N \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу линейного оператора  $A$ , если  $A\vec{a} = \vec{d}$ ,  $A\vec{b} = \vec{c}$ , где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -N \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} N \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ N \end{pmatrix}$$

### **Контрольная работа № 6: Многочлены от одной переменной**

1. Найдите корни многочлена, рассмотрев несколько способов, и разложите его на неприводимые множители

$$f(x) = x^4 + Nx^2 - N^2x^2 - N^3:$$

- а) над полем рациональных чисел,  
 б) над полем действительных чисел,  
 в) над полем комплексных чисел.

2. Найти НОД двух многочленов:  $f(x) = Nx^4 - Nx^3 - 8x - 6$  и  $f(x) = -Nx^2 + Nx - 6$ .

3. Найти рациональные корни многочлена:  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ .

### **Самостоятельная работа №1: Комплексные числа**

1. Даны комплексные числа:  $z_1 = -Ni + N$ ,  $z_2 = Ni + N$ .

Найти:

- а) сумму, произведение и частное данных чисел,  
 б) тригонометрическую форму данных чисел,  
 в)  $z_1^3$ ,  $\sqrt[3]{z_1}$ .

2. Решить уравнение:  $x^2 + N^2 = 0$

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $1 \leq |z| < 2$ .

### **Самостоятельная работа № 2: Линейные пространства. Евклидовы пространства** **Вариант N (N=1,2,3,...).**

1. Даны четыре вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  в некотором базисе.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ -N \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} N+1 \\ -N-2 \\ N \end{pmatrix}.$$

Показать, что  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{a}_4$  в этом базисе.

Решить обратную задачу.

2. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -N \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ -N \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Самостоятельная работа №3: Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей (привести матрицу к диагональному виду в базисе из собственных векторов)

$$M_A = \begin{pmatrix} -N & N & N+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Даны собственные значения оператора  $A$  и соответствующие им собственные векторы в некотором базисе. Найти матрицу оператора  $A$  в этом базисе.

$$\lambda_1 = -N, \lambda_2 = N, \lambda_3 = -1;$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -N \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ -N \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Самостоятельная работа №4: Квадратичные формы

1. а) Привести квадратичную форму к каноническому виду (и к нормальному виду) методом выделения полного квадрата. б) Записать матрицу квадратичной формы и матрицу преобразования, приводящего ее к каноническому виду. в) Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность:

$$x^2 - N/3xy - y^2 - N/2yz + z^2.$$

2. Приведение квадратичной формы к главным осям (с помощью ортогонального преобразования):  $Nx^2 + Ny^2 + 10xy$ .

### Самостоятельная работа №5: Уравнения 3-й и 4-й степени

Решить следующие уравнения:

$$1. x^3 - 6x - \frac{N^6+8}{N^3} = 0.$$

$$2. x^4 + x^3 - (N^2 + 2)x^2 - N^2x + 2N^2 = 0.$$

### **Промежуточная аттестация**

#### *Вопросы к экзамену*

1. Определение матрицы. Виды матриц
2. Сложение матриц. Свойства операции сложения матриц
3. Умножение матриц. Свойства операции умножения матриц
4. Транспонирование матриц
5. Определители 2, 3 и  $n$ -го порядков
6. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы. Теорема о разложении определителей по строке или столбцу. Вычисление определителей высших порядков
7. Свойства определителей
8. Обратная матрица и ее свойства. Невырожденная квадратная матрица. Необходимое и



достаточное условия существования обратной матрицы

9. Алгоритм вычисления обратной матрицы
10. Элементарные преобразования матриц. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований
11. Ранг матрицы
12. Основные методы вычисления ранга матрицы
13. Теорема о ранге матрицы. Неизменяемость строчечного и столбцевого рангов матрицы при элементарных преобразованиях
14. Системы линейных уравнений и их виды
15. Матричная и векторная формы записи систем линейных уравнений
16. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы. Виды матричных уравнений
17. Решение систем линейных уравнений методом Крамера
18. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Метод Жордана-Гаусса
19. Разрешимость системы линейных уравнений в общем виде
20. Система однородных линейных уравнений. Свойства решений однородной системы линейных уравнений
21. Определение линейной комбинации строк (столбцов) матрицы. Определение линейной зависимости (линейной независимости) строк (столбцов) матрицы. Теорема о ранге матрицы
22. Однородная система линейных уравнений. Пространство решений системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений
23. Связь между решениями неоднородной системы линейных уравнений и решениями соответствующей однородной системы

*Вопросы к зачету*

24. Основные понятия теории множеств
25. Операции над множествами
26. Свойства операций над множествами
27. Прямое произведение множеств и его свойства
28. Бинарные отношения и способы их задания
29. Виды бинарных отношений на заданном множестве
30. Отношение эквивалентности
31. Смежные классы. Фактор-множества
32. Отношение порядка
33. Композиция бинарных отношений
34. Инверсия бинарных отношений
35. Функциональные отношения. Отображения
36. Виды отображений
37. Алгебраические операции и их свойства. Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле.
38. Свойства группы. Примеры
39. Подгруппы. Критерий подгруппы. Тривиальная и собственные подгруппы
40. Порядок элемента группы. Циклические группы
41. Подстановка множества. Теорема Кэли
42. Отношение сравнения по подгруппе. Примеры
43. Свойства смежных классов по подгруппе
44. Теорема Лагранжа
45. Нормальный делитель группы
46. Фактор-группа
47. Ядерная группа
48. Понятие кольца
49. Свойства и примеры колец

50. Понятие поля
51. Свойства и примеры полей
52. Подкольца
53. Арифметическое  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $P$ . Действия над векторами
54. Свойства операций  $n$ -мерном векторном пространстве над полем  $P$
55. Линейная комбинация векторов
56. Линейная зависимость (линейная независимость) системы векторов
57. Линейная оболочка системы векторов
58. Базис и ранг конечной системы векторов.
59. Подпространства арифметического пространства
60. Координаты вектора в заданном базисе, разложение вектора по базисным векторам

*Вопросы к экзамену*

1. Кольцо многочленов от одной переменной
2. Операции сложения и умножения многочленов и их свойства
3. Отношение делимости в кольце многочленов над полем
4. Теорема о делении с остатком
5. Наибольший общий делитель многочленов и его свойства
6. Определение НОД многочленов с помощью алгоритма Евклида
7. Неприводимые многочлены
8. Основные свойства неприводимых над данным полем многочленов
9. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей
10. Теорема о факторизации в кольце многочленов над полем
11. Наименьшее общее кратное многочленов
12. Определение НОД и НОК многочленов по их каноническому разложению
13. Кратные неприводимые множители
14. Производная многочлена. Свойства

*Вопросы к зачету*

1. Характеристика поля. Примеры
2. Формула Тейлора
3. Функция, определяемая многочленом
4. Схема Горнера. Теорема Безу
5. Верхняя граница числа корней многочлена
6. Интерполяционная формула Лагранжа
7. Достаточное условие алгебраического и функционального равенства многочленов
8. Кратные корни многочлена, число корней с учетом кратности
9. Формулы Виета
10. Алгебраическая замкнутость числовых полей. Основная теорема алгебры
11. Следствия из основной теоремы алгебры
12. Разложение многочлена над полем действительных чисел
13. Границы действительных корней многочлена с действительными коэффициентами
14. Отделение действительных корней многочлена методом Штурма
15. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами
16. Неприводимые многочлены в кольцах целых и рациональных чисел
17. Критерий Эйзенштейна
18. Решение уравнений третьей степени. Формулы Кардано
19. Решение уравнений четвертой степени. Метод Феррари
20. Построение кольца многочленов от нескольких переменных
21. Обобщенная теорема Безу и ее применение

22. Лексикографическое упорядочение многочленов
23. Симметрические многочлены
24. Элементарные симметрические многочлены
25. Однородные симметрические многочлены
26. Основная теорема о симметрических многочленах
27. Представление данного многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов
28. Применение теории симметрических многочленов при решении уравнений и систем уравнений
29. Результат двух многочленов
30. Определение взаимно простых многочленов по значению их результата
31. Исключение неизвестного из системы двух уравнений с двумя неизвестными при помощи результата
32. Дискриминант многочлена

**Схема соответствия типовых контрольных заданий и оцениваемых знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции	Типовое контрольное задание
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1.	Вопросы к экзамену Вопросы к зачету Тестовые задания
	ПК-1.2.	Вопросы к экзамену Вопросы к зачету Контрольные задания
	ПК-1.3.	Вопросы к экзамену Вопросы к зачету Контрольные задания