

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Егорова Галина Викторовна  
Должность: Проректор по учебной работе  
Дата подписания: 28.09.2023 09:45:05  
Уникальный программный ключ:  
4963a4167398d8232817460cf5aa786786d17e23

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»  
(ГГТУ)**

**УТВЕРЖДАЮ  
проректор**



**26 июня 2023г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.07.06**

**Теория функций комплексного переменного**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.05 Педагогическое образование ( с двумя профилями подготовки)</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика, Физика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2023г.**

## **1. Пояснительная записка**

Предметом изучения в рамках настоящего курса являются основные понятия и методы теории функций комплексного переменного. Сначала для функций комплексного переменного вводятся понятия предела, производной, интеграла; следующий этап изучения связан с построением теории аналитических функций, которые являются важнейшим классом функций комплексного переменного.

Теория функций комплексного переменного является важной составляющей в общей структуре математического знания студента – педагога. Именно эта теория придает законченность рассмотрению многих вопросов классического математического анализа.

Выход в комплексную область расширяет сферу применения методов математического анализа к исследованию различных вопросов математики и её приложений. Такие методы теории функций комплексного переменного, как разложение в ряды, вычисление интегралов с помощью вычетов, конформные отображения широко используются в различных областях математики, физики и естествознания.

Рабочая программа дисциплины составлена на основе учебного плана 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) по профилю Математика, Физика 2023 года начала подготовки.

При реализации образовательной программы университет вправе применять дистанционные образовательные технологии.

## **2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

### **2.1 Цели дисциплины**

Целью учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» является формирование у студентов компетенций, необходимых для осуществления профессиональной деятельности в области преподавания математики в образовательных учреждениях разного типа в соответствии с требованиями образовательных стандартов.

### **2.2. Задачи дисциплины**

заключаются в формировании у студентов комплекса знаний, умений и навыков по основным понятиям, идеям и методам теории функций комплексного переменного, необходимых для эффективного решения профессиональных задач, связанных с обучением математике в школе и вузе, в том числе:

- по теории дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного;
- по теории числовых и функциональных рядов (в т.ч. рядов Тейлора и Лорана);
- по теории вычетов и классификации особых точек;
- по теории конформных отображений.

### **2.3. Знания и умения обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:



	<b>Раздел 1. Комплексные числа и функции комплексного переменного</b>	<b>7</b>	<b>60</b>	<b>10</b>	<b>-</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	
1.	Тема 1. Комплексные числа и действия над ними	7	12	2	-	4	6	
2.	Тема 2. Дифференцирование функций комплексного переменного	7	12	2	-	4	6	
3.	Тема 3. Элементарные функции комплексного переменного	7	16	2	-	6	8	
4.	Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного	7	20	4	-	6	10	
	<b>Раздел 2. Ряды в комплексной области. Вычеты</b>	<b>7</b>	<b>48</b>	<b>8</b>	<b>-</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	
5.	Тема 5. Числовые ряды. Ряды аналитических функций	7	20	4	-	6	10	
6.	Тема 6. Ряд Лорана и изолированные особые точки.	7	12	2	-	4	6	
7.	Тема 7. Вычеты и их приложения	7	16	2	-	6	8	
	<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>7</b>	<b>36</b>					<b>36</b>
	<b>Итого</b>		<b>144</b>	<b>18</b>	<b>-</b>	<b>36</b>	<b>54</b>	<b>36</b>

#### 4.2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

##### Лекции

#### *Раздел 1. Комплексные числа и функции комплексного переменного*

##### **Тема 1. Комплексные числа и действия над ними**

Понятие комплексного числа. Действия над комплексными числами. Комплексная плоскость. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Извлечение корня из комплексного числа.

Последовательность комплексных чисел и ее предел: определение, сходимость мнимой и действительной части, свойства. Стереографическая проекция. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка. Расширенная комплексная плоскость. Множества точек на комплексной плоскости.

### **Тема 2. Дифференцирование функций комплексного переменного**

Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана (т.1-2). Аналитические функции и их свойства. Гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении.

### **Тема 3. Элементарные функции комплексного переменного**

Дробно-линейная функция и её свойства. Элементарные аналитические функции в комплексной области и их свойства: показательная, логарифмическая, тригонометрические и гиперболические функции. Обратные тригонометрические функции. Логарифмы комплексных чисел. Ветви многозначных функций. Понятие о римановой поверхности. Конформные отображения элементарными функциями.

### **Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного**

Определение интеграла от функции комплексного переменного и его свойства. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Интегральная теорема Коши для многосвязной области. Неопределенный интеграл в комплексной области. Вывод интегральной формулы Коши. Принцип максимума модуля аналитической функции. Существование производных всех порядков для функции, аналитической в области. Интегральное представление производных аналитической функции. Вычисление интегралов по замкнутому контуру от функции комплексного переменного.

### ***Раздел 2. Ряды в комплексной области. Вычеты***

### **Тема 5. Числовые ряды. Ряды аналитических функций**

Числовые ряды с комплексными членами: основные определения. Признаки сходимости комплексных числовых рядов. Абсолютная сходимость рядов. Функциональные ряды. Степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда. Ряд Тейлора. Единственность определения аналитической функции.

### **Тема 6. Ряд Лорана и изолированные особые точки**

Главная и правильная части ряда Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Ряд Лорана в окрестности особой точки. Классификация изолированных особых точек.

### **Тема 7. Вычеты и их приложения**

Понятие вычета аналитической функции в изолированной особой точке. Определение и формулы вычисления вычетов. Основная теорема теории вычетов. Применение теории вычетов к вычислению определенных интегралов.

### **Практические занятия**

*Практические занятия проводятся в форме практикума: предполагается решение задач разного уровня сложности при опоре на определения и свойства основных понятий по теме.*

#### **Раздел 1. Комплексные числа и функции комплексного переменного**

*Учебные цели:*

Сформировать систематизированные знания студентов по методам решения задач, связанных с геометрической интерпретацией комплексных чисел, дифференцированием и интегрированием функций комплексного переменного.

#### **Практическое занятие 1.**

**Тема: Комплексные числа и действия над ними**

*Учебные цели:*

1. Решить типовые задачи , включающие:
  - а )выполнение действий над комплексными числами,
  - б) нахождение модуля и аргумента комплексного числа.

*Основные термины и понятия:*

- сумма и разность комплексных чисел,
- произведение и частное комплексных чисел,
- тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел,
- модуль комплексного числа,
- аргумент комплексного числа,
- главное значение аргумента комплексного числа.

#### **Практическое занятие 2.**

**Тема: Комплексные числа и действия над ними**

*Учебные цели:*

- Решить задачи разного уровня сложности:
- а)на нахождение линий и областей на комплексной плоскости;
  - б)на использование определения и свойств предела последовательности комплексных чисел .

*Основные термины и понятия:*

- модуль комплексного числа,
- аргумент комплексного числа,
- геометрическая интерпретация комплексных чисел,
- предел последовательности комплексных чисел.

#### **Практическое занятие 3**

**Тема: Дифференцирование функций комплексного переменного**

*Учебные цели:*

- Решить задачи разного уровня сложности:
- а)на нахождение действительной и мнимой частей функции комплексного переменного;

- б) на вычисление предела в точке функции комплексного переменного;
- в) на проверку условий Коши- Римана;
- г) на восстановление аналитической функции по заданной её мнимой ( действительной) части.

*Основные термины и понятия:*

- функция комплексного переменного,
- предел функции комплексного переменного,
- производная функции комплексного переменного,
- условия Коши- Римана,
- аналитические функции.

#### **Практическое занятие 4**

**Тема: Дифференцирование функций комплексного переменного**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности:

- а) на использование геометрического смысла производной функции комплексного переменного;
- б) на построение образа линий и областей при заданных отображениях.

*Основные термины и понятия:*

- функция комплексного переменного,
- условия Коши- Римана,
- модуль и аргумент производной функции комплексного переменного,
- конформное отображение.

#### **Практическое занятие 5.**

**Тема: Элементарные функции комплексного переменного**

*Учебные цели:*

Решить задачи разного уровня сложности на использование определения и свойств элементарных функций комплексного переменного.

*Основные термины и понятия:*

- показательная функция ,
- логарифмическая функция ,
- логарифмы комплексных чисел,
- тригонометрические функции.

#### **Практическое занятие 6.**

**Тема: Элементарные функции комплексного переменного**

*Учебные цели:*

Выполнить все задания контрольной работы №1 по разделу 1 «Комплексные числа и функции комплексного переменного».

## Практическое занятие 7

### Тема: Элементарные функции комплексного переменного

*Учебные цели:*

1. Повторить определение и общие свойства конформных отображений.
2. Решить задачи на использование основных элементарных функций при построении конформных отображений заданных областей.

*Основные термины и понятия:*

- конформное отображение,
- дробно- линейная функция,
- функция Жуковского,
- степенная функция,
- показательная функция.

## Практическое занятие 8.

### Тема: Интегрирование функций комплексного переменного

*Учебные цели:*

Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на вычисление интегралов от функции комплексного переменного.

*Основные термины и понятия:*

- интеграл от функции комплексного переменного,
- интеграл и первообразная.

## Практическое занятие 9,10

### Тема: Интегрирование функций комплексного переменного

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на вычисление интегралов от функции комплексного переменного с помощью интегральной формулы Коши и интегральной формулы для производной  $n$ -го порядка аналитической функции.
- 2.Выполнить все задания самостоятельной работы №1.

*Основные термины и понятия:*

- односвязная область,
- аналитические функции,
- интегральная формула Коши,
- интеграл Коши,
- производные аналитической функции.

## ***Раздел 2.Ряды в комплексной области. Вычеты***

*Учебные цели:*

Сформировать систематизированные знания студентов по методам решения задач по теории рядов на комплексной плоскости и их приложению к исследованию функций комплексного переменного.



## **Практическое занятие 1.**

### **Тема: Числовые ряды. Ряды аналитических функций**

*Учебные цели:*

Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на исследование сходимости числовых и степенных рядов в комплексной области.

*Основные термины и понятия:*

- ряд, сумма ряда,
- сходимость и абсолютная сходимость ряда,
- степенные ряды, область сходимости.
- радиус сходимости.

## **Практическое занятие 2,3.**

### **Тема: Числовые ряды. Ряды аналитических функций**

*Учебные цели:*

1. Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности:
  - а) на нахождение области сходимости заданного ряда в комплексной области;
  - б) на разложение функции комплексного переменного в ряд Тейлора;
2. Выполнить все задания самостоятельной работы № 2.

*Основные термины и понятия:*

- ряд, сумма ряда,
- степенные ряды, область сходимости.
- радиус сходимости,
- разложение функций в степенной ряд,
- ряд Тейлора.

## **Практическое занятие 4**

### **Тема: Ряд Лорана и изолированные особые точки.**

*Учебные цели:*

- Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности:
- а) на разложение функции комплексного переменного в ряд Лорана;
  - б) на нахождение области сходимости заданного ряда.

*Основные термины и понятия:*

- ряд Лорана,
- главная и правильная часть ряда Лорана,
- разложение функций в степенные ряды.

## **Практическое занятие 5.**

### **Тема: Ряд Лорана и изолированные особые точки.**

*Учебные цели:*

1. Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на определение характера изолированных особых точек.

*Основные термины и понятия:*

- ряд Лорана,

- нули функции,
- устраняемые особые точки,
- полюсы,
- существенно особые точки.

### **Практическое занятие 6,7.**

#### **Тема: Вычеты и их приложения**

*Учебные цели:*

1. Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на вычисление вычетов функций в особых точках.
2. Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на вычисление определенных интегралов с помощью вычетов.

*Основные термины и понятия:*

- ряды,
- разложение в ряд,
- изолированная особая точка,
- вычеты,
- теорема Коши о вычетах,
- интегралы от функций действительного переменного.

### **Практическое занятие 8.**

#### **Тема: Вычеты и их приложения**

*Учебные цели:*

Выполнить все задания контрольной работы №2.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине ( модулю)**

*Перечень литературных источников для самостоятельной работы обучающихся:*

1. Исаченко, Н. А. Комплексный анализ в примерах и упражнениях: интегралы и вычеты : учебное пособие : [16+] / Н. А. Исаченко ; Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского. – Омск : Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского (ОмГУ), 2019. – 120 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=575792> (дата обращения: 17.05.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-7779-2370-7. – Текст : электронный.
2. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 368 с. — ISBN 978-5-8114-1064-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210425>(дата обращения: 18.05.2022).
3. Чуешев, В. В. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие : [16+] / В. В. Чуешев, Н. А. Чуешева ; Кемеровский государственный университет. – 3-е изд., исправ. и доп. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2020. – Часть 2. – 162 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600355> (дата обращения: 17.05.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-8353-2604-4 (Ч. 2). - ISBN 978-5-8353-1897-1. – Текст : электронный.

Самостоятельная учебная работа студента определяется программой дисциплины, перечнем теоретических вопросов для текущего промежуточного и итогового контроля знаний. Этот вид учебной деятельности студента предусматривает:

- проработку теоретического материала (изучение теории);
- решение задач и выполнение домашних заданий по определенным темам;
- периодический устный или письменный отчет о выполненных заданиях;
- подготовку к коллоквиумам, контрольным и самостоятельным работам;
- самоконтроль и промежуточный контроль полученных знаний.

Систематичность и добросовестность студента при выполнении заданий для самостоятельной работы могут существенно повлиять на уровень знаний, умений и навыков, формируемых в рамках данной учебной дисциплины. Предполагается, что активная самостоятельная работа студента по данной дисциплине будет способствовать развитию познавательной самостоятельности и творческой активности студента, формированию достаточно высокого уровня его математической культуры.

Кроме того, эффективность и успешность самостоятельной работы студента при изучении данной дисциплины непосредственно связаны с постепенным формированием профессиональных знаний и умений студента - будущего учителя математики.

### *Задания для организации самостоятельной работы студентов*

#### **Зачетное задание №1**

#### **Тема: Дифференцирование функций комплексного переменного**

1. Для данной функции  $f(z)$  найти её действительную и мнимую часть:

А)  $f(z) = \operatorname{Re} \bar{z} + i \operatorname{Im} z$ ;

Б)  $f(z) = \frac{1+i}{z-i}$ .

2. Вычислить значения функции  $f(z)$  в точках  $z_1, z_2$ . Ответ записать в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

А)  $f(z) = \frac{1}{z} - 2i$ ,  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = \frac{i}{2}$ ;

Б)  $f(z) = \frac{z}{|z|}$ ,  $z_1 = 2 + 2i$ ,  $z_2 = 2e^{0,5i\pi}$ .

В)  $f(z) = e^{\bar{z}}$ ,  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = \ln 2 - 10\pi i$ .

3. Найти образ множества  $E$  точек  $z$  комплексной плоскости при заданном отображении  $w$ , если :

1).  $w = \frac{1}{z}$ ,  $E = \{z: |z + 1| = 1\}$ ,      2).  $w = \frac{z-1}{z+1}$ ,  $E = \{z: \operatorname{Re} z = 1\}$ ,

3).  $w = 0,5(z + \frac{1}{z})$ ,  $E = \{z: |z| = 2\}$ ,      4).  $w = z^2 \cdot E = \{z: \operatorname{Im} z = 1\}$ ,

4. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ , если известно, что

А)  $u = x^2 - y^2 + 2x$ ,  $f(i) = -1 + 2i$ ;

$$Б) u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

## Зачетное задание №2

### Тема: Интегрирование функций комплексного переменного

1. Вычислить интеграл :

- а)  $\oint |z|^2 dz$  по окружности  $\gamma: |z|=1$  ;  
 б)  $\oint Re z dz$  по окружности  $\gamma: |z-1|=1$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 |z| dz$ , если путями интегрирования служат :

- а) прямолинейный отрезок;  
 б) верхняя половина единичной окружности;  
 в) нижняя половина единичной окружности.

3. Вычислить интегралы вдоль отрезка прямой  $m$  с началом в точке  $z_1=0$  и концом  $z_2=1/2 + i(\sqrt{3})/2$  от следующих функций:

- а)  $e^{t Re z}$ , где  $t = |z|^2$   
 б)  $e^{t Re z}$ , где  $t = z^2$

в)  $\frac{|z|}{|z+1|}$

4. Вычислить интеграл  $\int tgz dz$  вдоль дуги параболы  $y=x^2$ , соединяющей точки  $z_1=0$  и  $z_2=1+i$ .

5. Вычислить интеграл  $\int \sqrt[4]{z} dz$  по дуге окружности  $\gamma: |z|=2$ , лежащей в полуплоскости  $Im z \leq 0$  и пробегаемой от точки  $z_1=-2$  до точки  $z_2=2$ , причем для функции  $\sqrt[4]{z}$  берется та непрерывная ветвь в  $Im z \leq 0$ , которая в точке  $z=1$  принимает значение  $i$ .

6. Вычислить интеграл  $\oint \frac{dz}{z^2+16}$  по окружности  $\gamma: |z|=5$  (обход кривой осуществляется против часовой стрелки).

7. Вычислить интеграл  $\oint \frac{\sin z \sin(z-1)}{z(z-1)} dz$  по окружности  $\gamma: |z|=2$  (обход кривой осуществляется против часовой стрелки).

## 6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине ( модулю)

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации приведен в приложении.

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины ( модуля)

### 7.1. Основная литература:

1. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов [и др.]. — Минск : Вышэйшая школа, 2019. — 431 с. — ISBN 978-985-06-3071-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/174652>
2. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 5-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-00101-916-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/151505>

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Далингер, В. А. Комплексный анализ : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 143 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08399-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/492726>
2. Горушкина, Н. В. Математика: теория функций комплексного переменного : учебное пособие / Н. В. Горушкина, В. А. Карасев, Г. Д. Лёвшина. — Москва : МИСИС, 2019. — 101 с. — ISBN 978-5-907061-15-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/116912>
3. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9392-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/193364>

## 8. Перечень современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем

Все обучающихся университета обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, которые подлежат обновлению при необходимости, что отражается в листах актуализации рабочих программ.

### Современные профессиональные базы данных:

1. Министерство образования и науки Российской Федерации <http://mon.gov.ru>
2. Федеральный портал «Российское образование» <http://www.edu.ru>
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам <http://window.edu.ru>
4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов <http://fcior.edu.ru>
5. Министерство образования Московской области <http://mo.mosreg.ru>
6. Интернет-экзамен в сфере профессионального образования (ФЭПО) <http://www.fepo.ru>
7. Каталог электронных образовательных ресурсов Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) <http://eor.edu.ru>
8. Портал Федерального института педагогических измерений <http://www.fipi.ru>

9. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://edu-top.ru/katalog/>
10. Образовательные ресурсы Интернета "Всем, кто учится" <http://www.alleng.ru>
11. Электронная информационно-образовательная среда Университета <http://dis.ggtu.ru/>
12. «Университетская библиотека online» <http://biblioclub.ru/>
13. Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
14. Электронно-библиотечная система «Юрайт» [www.biblio-online.ru](http://www.biblio-online.ru)
15. Электронная библиотека диссертаций <http://diss.rsl.ru/>

**Информационные справочные системы:**

1. информационно-поисковые системы [www.google.ru/](http://www.google.ru/), [www.yandex.ru/](http://www.yandex.ru/)
2. Прикладная математика: Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями: <http://www.pm298.ru>


**9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине имеется в наличии следующая материально-техническая база:

Аудитории	Программное обеспечение
<ul style="list-style-type: none"> <li>- учебная аудитория для проведения учебных занятий по дисциплине, оснащенная компьютером с выходом в интернет, мультимедиа проектором;</li> <li>- помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ГГТУ;</li> <li>- специализированная аудитория для проведения лабораторных работ по дисциплине, оснащенная набором реактивов и лабораторного оборудования;</li> </ul>	<p>Операционная система            Пакет офисных приложений            Браузер Firefox, Яндекс</p>

## 10. Обучение инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

При необходимости рабочая программа дисциплины может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

Автор (составитель):  к.ф.-м.н., доцент Панчищина В.А.

Программа одобрена на заседании кафедры математики и экономики 26.06.2023г., протокол №8.

Зав. кафедрой  Каменских Н.А.

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»  
(ГГТУ)**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ  
АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
Б1.О.07.06**

**Теория функций комплексного переменного**

<b>Направление подготовки</b>	<b>44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)</b>
<b>Направленность (профиль) программы</b>	<b>Математика, Физика</b>
<b>Квалификация выпускника</b>	<b>Бакалавр</b>
<b>Форма обучения</b>	<b>Очная</b>

**Орехово-Зуево  
2023 г.**



## 1.1. Индикаторы достижения компетенций

Код и наименование профессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции
<b>ПК-1.</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	<b>ПК-1.1.</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).

## 1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оценка уровня освоения компетенций на разных этапах их формирования проводится на основе дифференцированного контроля каждого показателя компетенции в рамках оценочных средств, приведенных в ФОС.

Оценка «отлично», «хорошо», «зачтено» соответствует **повышенному** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «удовлетворительно», «зачтено» соответствует **базовому** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «неудовлетворительно», «не зачтено» соответствует показателю «**компетенция не освоена**».

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде	Критерии оценивания
<i>Оценочные средства для проведения текущего контроля</i>				

1	<p><b>Самостоятельная работа</b></p> <p>(показатель компетенции «Умение»)</p>	<p>Контрольное мероприятие, цель которого состоит в промежуточном контроле знаний по теме.</p>	<p>Комплект заданий</p>	<p>- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если правильно выполнены все задания ;</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если представлено решение всех задач, включенных в работу; при этом: а) при верном ходе рассуждений решение отдельных задач содержит вычислительные ошибки, приведшие к неверному ответу; б) правильное решение одной-двух задач не доведено до конца;</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если правильно выполнено примерно 30% всех заданий.</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если решение не отвечает ни одному из требований , указанных выше.</p>
2	<p><b>Контрольная работа</b></p> <p>(показатель компетенции «Владение»)</p>	<p>Контрольное мероприятие, цель которого состоит в выявлении уровня знаний, умений и навыков, сформированных при изучении</p>	<p>Комплект заданий .</p>	<p>- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если правильно выполнены все задания (обоснованно получен правильный ответ), либо допущены незначительные погрешности (решение</p>

		определенной темы данной дисциплины		<p>задачи в целом верное, только на последнем этапе допущены вычислительные ошибки);</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если представлено решение всех задач, включенных в работу; при этом: а) при верном ходе рассуждений решение отдельных задач содержит вычислительные ошибки, приведшие к неверному ответу; б) правильное решение одной - двух задач не доведено до конца ( представлено примерно 80% решения задачи);</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если правильно выполнено примерно 30% всех заданий .</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если решение не отвечает ни одному из требований , указанных выше.</p>
<i>Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации</i>				
3	<b>Экзамен</b> (показатель компетенции)	Контрольное мероприятие, которое	Вопросы к экзамену	- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если дан полный ответ

	«Знание»)	проводится по окончании изучения дисциплины в виде собеседования по экзаменационным билетам.		<p>на вопросы билета и правильные ответы на дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если дан краткий ответ на вопросы билета и правильные ответы на дополнительные вопросы или полный ответ на вопросы билета и один – два неправильных ответа на дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если дан краткий ответ на вопросы билета и неправильные ответы на отдельные дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если ответ не соответствует ни одному из требований, указанных выше.</p>
--	-----------	--	--	--

**1.3. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и / или опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.**

#### **Текущий контроль**

В случае применения в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий используется <https://dis.ggtu.ru/course/view.php?id=4611>

Комплект заданий для самостоятельной работы

**Самостоятельная работа №1**

**Тема: Интегрирование функций комплексного переменного**

**Вариант 1**

1. Вычислить интеграл  $I = \int \operatorname{Im} z dz$  по линиям, соединяющим точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + 2i$ :

а) по прямой; б) по параболе  $y = 2x^2$ .

2. Вычислить интеграл  $I = \int_0^i (z - i)e^{-z} dz$ .

3. Вычислить интеграл  $\oint \frac{\sin z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$  по окружности  $\gamma: |z + \pi i| = 1$  (обход кривой осуществляется против часовой стрелки).

**Вариант 2**

1. Вычислить интеграл  $I = \int \bar{z} dz$  по линиям, соединяющим точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + i$ :

а) по параболе  $x = y^2$ ; б) по ломаной  $z_1 z_2 z_3$ , где  $z_3 = i$ .

2. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{1+i} \sin z \cos z dz$

3. Вычислить интеграл  $\oint \frac{\sin z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$  по окружности  $\gamma: |z - \pi i| = 1$  (обход кривой осуществляется против часовой стрелки).

**Самостоятельная работа №2**

**Тема: Числовые ряды. Ряды аналитических функций.**

**Вариант 1**

1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n}{3^n};$$

2. Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_1^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n$$

3. Данную функцию  $f(z) = \sin(2z+1)$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $z+1$ , используя готовые разложения, и найти радиус сходимости ряда.

**Вариант 2**

1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n \sin n}{3^n};$$

2. Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_1^n \frac{(n+i)(z+i)^n}{(1+i)^n}$$

3. Данную функцию  $f(z) = \cos z$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $z + \frac{\pi}{4}$ , используя готовые разложения, и найти радиус сходимости ряда.

*Комплект заданий для контрольной работы*

**Контрольная работа №1**

**Тема: Комплексные числа и функции комплексного переменного**

**Вариант 1**

1. Найти множество точек на комплексной плоскости, которое определяется условиями:

$$1 < |z| < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

2. Найти образы координатных осей OX и OY при отображении  $w = \frac{z+1}{z-1}$ ,

3. Изобразить множество решений уравнения  $e^z - 2 = 0$  на рисунке.

4. Записать в алгебраической форме число  $\operatorname{Arcsin}(1/3\pi i)$

5. Определить, в каких точках дифференцируема функция  $f(z) = \bar{z}^2$

6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если известно, что

$$u = x^3 - 3xy^2 + 2y, \quad f(0) = 1$$

**Вариант 2**

1. Найти множество точек на комплексной плоскости, которое определяется условиями:

$$2 \leq |z|, \quad \frac{\pi}{8} < \arg z < 2\frac{\pi}{3}.$$

2. Найти образы координатных осей OX и OY при отображении  $w = 1 + \frac{1}{z}$

3. Изобразить множество решений уравнения  $e^z + 2 = 0$  на рисунке.

4. Записать в алгебраической форме число  $\operatorname{Arcsin} \pi i$

5. Определить, в каких точках дифференцируема функция  $f(z) = e^{-z}$

6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если известно, что

$$U = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x, \quad f(0) = 0$$

## Контрольная работа №2

### Тема: Ряды в комплексной области. Вычеты

#### Вариант 1

1. Данную функцию  $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$ , используя готовые разложения, и найти радиус сходимости ряда.

2. Найти область сходимости следующего ряда

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}$$

3. Разложить данную функцию в ряд Лорана в указанных кольцах:  $f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$

а)  $0 < |z| < 1$ , б)  $1 < |z| < +\infty$ .

4. Определить характер особой точки  $z_0 = \pi$  функции  $f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}$ .

5. Найти вычеты в особых точках следующей функции  $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$

#### Вариант 2

1. Данную функцию  $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$ , используя готовые разложения, и найти радиус сходимости ряда.

2. Найти область сходимости следующего ряда

$$\sum_1^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_0^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$$

3. Разложить данную функцию в ряд Лорана в указанных кольцах:  $f(z) = \frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$

а)  $1 < |z| < 4$ , б)  $4 < |z| < +\infty$

4. Определить характер особой точки  $z_0 = 0$  функции  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ .

5. Найти вычеты в особых точках следующей функции:  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$

#### Промежуточная аттестация

В случае применения в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий используется <https://dis.ggtu.ru/course/view.php?id=4611>

## ***Примерный перечень вопросов к экзамену***

### ***Часть 1***

1. Понятие комплексного числа. Действия над комплексными числами.
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
3. Возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел.
4. Стереографическая проекция. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка.
5. Последовательность комплексных чисел и ее предел: определение, сходимости мнимой и действительной части, свойства.
6. Топология комплексной плоскости: множества и области на комплексной плоскости – основные понятия и терминология.
7. Понятие функции комплексного переменного (определение, выделение действительной и мнимой части, примеры)
8. Предел функции комплексного переменного и его свойства.
9. Непрерывность функции комплексного переменного: определение, примеры, свойства.
10. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана (т.1-2).
11. Аналитические функции и их свойства.
12. Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части.
13. Гармонические функции.
14. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении.
15. Показательная функция комплексного переменного.
16. Логарифмическая функция комплексного переменного. Логарифмы комплексных чисел
17. Тригонометрические функции комплексного переменного и их свойства.
18. Обратные тригонометрические функции комплексного переменного.

### ***Часть 2***

19. Понятие интеграла от функции комплексного переменного .
20. Свойства интеграла от функции комплексного переменного.
20. Интегральная теорема Коши для односвязной области, интегральная теорема для многосвязной области.
21. Интеграл и первообразная.
22. Интегральная формула Коши и ее следствия.
23. Применение формулы Коши к вычислению определенных интегралов.
24. Числовые ряды на комплексной плоскости. Признаки сходимости комплексных числовых рядов. Абсолютная сходимость рядов.
25. Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды в комплексной области.
26. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда.
27. Степенные ряды в комплексной области. Ряд Тейлора.
28. Ряд Лорана: определение, теорема Лорана.
29. Изолированные особые точки и их классификация.
30. Понятие вычета. Основная теорема теории вычетов.



**Схема соответствия типовых контрольных заданий и оцениваемых знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций:**

№	Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции	Типовое контрольное задание
1	<b>ПК-1.</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	<b>ПК-1.1.</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	Вопросы к экзамену Самостоятельная работа Контрольная работа Диагностическая работа

**Диагностическая работа №1**

*( для проверки уровня сформированности компетенции ПК-1 по индикатору ПК-1.1)*

- Модуль комплексного числа  $z = (2 - i)^2$  равен \_\_\_\_\_
- Для каждого комплексного числа 1-3 выберите соответствующее значение аргумента  $Argz$ :

1. $z = -i$	a. $Arg z = \pi/4 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
2. $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$	б. $Arg z = 2\pi/3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
3. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$	в. $Arg z = -\pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
	г. $Arg z = \pi/6 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

1	2	3

- Действительная часть комплексного числа

$$z = \frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i}$$

равна (выберите один вариант ответа):

- 2

б. 3

в. 5

4.

4.1. Укажите, сколько корней имеет уравнение  $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$

относительно комплексного неизвестного  $z$  ( в ответе запишите число корней):

\_\_\_\_\_

4.2. Запишите такие корни этого уравнения, у которых мнимая часть равна рациональному числу( ответ представьте в виде:  $z = \dots$ ): \_\_\_\_\_.

5. Установите соответствие между алгебраической и тригонометрической формой записи комплексных чисел:

1. $z = 1 - \sqrt{3}$	а. $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$
2. $z = -1 + i$	б. $z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4})$
3. $z = \sqrt{3} - i$	в. $z = (\sqrt{3} - 1)(\cos\pi + i \sin\pi)$
4. $z = -1 - i$	г. $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})$

1	2	3	4

6. Представьте в тригонометрической форме комплексное число

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 : z = \underline{\hspace{10em}}$$

7. Укажите все значения корня  $\sqrt{i}$  ( выберите все верные ответы):

а.  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

б.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

в.  $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

г.  $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Выясните, какую фигуру представляет собой множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а.  $\operatorname{Re} z = -2$

б.  $\arg z = \frac{\pi}{6}$

в.  $|z + i| = 2$

г.  $|z - 1| \leq 4$

В ответе укажите только одно слово - название этой фигуры:

а	б	в	г

**9.** Выясните, какие линии на комплексной плоскости определяются следующими уравнениями:

а.  $\text{Im}(1/z) = 1/2$

б.  $|z + 1| = |z - i|$

В ответе укажите только одно слово - название этой линии

а	б

**10.**

**10.1.** Запишите в алгебраической форме комплексные числа

$z_1 = 2(\cos 7\pi/6 + i\sin 7\pi/6)$  и  $z_2 = (\cos \pi/6 + i\sin \pi/6)$ :

\_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_.

**10.2.** Установите, какая из точек  $z_1, z_2$  (см. 10.1)

принадлежит множеству точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$\text{Re}(1/z) < 1/2$ .

В ответе в соответствующем столбце напишите только одно слово - принадлежит

$z_1$	$z_2$