

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Егорова Галина Викторовна  
Должность: Проректор по учебной работе  
Дата подписания: 07.11.2022 11:15:38  
Уникальный программный ключ:  
4963a4167398d8232817460cf5a76d186dd7c25

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»  
(ГГТУ)**

**УТВЕРЖДАЮ  
проректор**



**20 мая 2022г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.07.05**

**Теория функций действительного переменного**

|   |  |
|---|--|
| <b>Направление подготовки</b>             | <b>44.03.05 Педагогическое образование(с двумя профилями подготовки)</b> |
| <b>Направленность (профиль) программы</b> | <b>«Математика».<br/>«Информатика»</b>                                   |
| <b>Квалификация выпускника</b>            | <b>Бакалавр</b>  |
| <b>Форма обучения</b>                     | <b>Очная</b>   |

**Орехово-Зуево  
2022 г.**

## 1. Пояснительная записка

Предметом изучения в рамках настоящего курса являются основные понятия и методы теории функций действительного переменного. В учебном курсе «Теория функций действительного переменного» продолжается изучение таких фундаментальных понятий математики как множество и функция. При этом осуществляется обобщение ряда понятий и методов классического математического анализа и на этой основе создаются новые оригинальные конструкции и методы исследования.

Идеи и методы теории функций действительного переменного позволяют с единых позиций подходить к решению задач из разных разделов математики и физики. Знание теории функций действительного переменного является необходимым элементом математического образования современного студента- педагога.

Рабочая программа дисциплины составлена на основе учебного плана 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» по профилю «Математика», «Информатика» 2022 года начала подготовки.

При реализации образовательной программы университет вправе применять дистанционные образовательные технологии.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

### 2.1 Цели дисциплины

Целью учебной дисциплины «Теория функций действительного переменного» является формирование у студентов компетенций, необходимых для осуществления профессиональной деятельности в области преподавания математики в образовательных учреждениях разного типа в соответствии с требованиями образовательных стандартов.

### 2.2. Задачи дисциплины

закключаются в формировании у студентов комплекса знаний, умений и навыков по теории множеств (бесконечные множества, мощность множества), абстрактным пространствам и их структуре, теории меры и интеграла Лебега, необходимых для эффективного решения профессиональных задач, связанных с обучением математике в школе и вузе.

### 2.3 Знания и умения обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

| <b>В результате изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного»» студент должен обладать следующими компетенциями:</b>                           | <b>Коды формируемых компетенций</b> |
|---|-------------------------------------|
| <b>Универсальные компетенции (УК)</b><br>Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных | <b>УК-1</b>                         |

|  |             |
|--|-------------|
| задач.   |             |
| <b>Профессиональные компетенции (ПК)</b><br>Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач. | <b>ПК-1</b> |

### Индикаторы достижения компетенций

| Код и наименование универсальной компетенции  | Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции   |
|---|--|
| <b>УК-1.</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | <p><b>УК-1.1.</b> Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.</p> <p><b>УК-1.2.</b> Применяет логические формы и процедуры , способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.</p> <p><b>УК-1.3.</b> Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений</p> |

| Код и наименование профессиональной компетенции  | Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции   |
|--|---|
| <b>ПК-1.</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач | <p><b>ПК-1.1.</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).</p> <p><b>ПК-1.2.</b> Умеет осуществлять отбор содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.</p> <p><b>ПК-1.3.</b> Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий , применять методы, приемы и технологии обучения , в том числе информационные.</p> |

### 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» относится к обязательной части учебного плана (Б1.О. 07.05).

Программа курса предполагает наличие у студентов знаний по дисциплинам:

«Алгебра», «Математический анализ», «Геометрия».

Дисциплины, для изучения которых необходимы знания данного курса:

«Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальные уравнения», некоторые дисциплины по выбору студента.

#### 4.1. Структура и содержание дисциплины.

| № п/п | Раздел/тема  | Семестр  | Всего час. | Виды учебных занятий     |          |          |           | Промежуточная аттестация |
|-------|--|----------|------------|--------------------------|----------|----------|-----------|--------------------------|
|       |  |          |            | Контактная работа (ауд.) |          |          | СРС       |                          |
|       |  |          |            | Лекции                   | ЛЗ       | ПЗ       |           |                          |
|       | <b><i>Раздел 1. Элементы теории множеств</i></b>                     | <b>5</b> | <b>24</b>  | <b>6</b>                 | <b>-</b> | <b>6</b> | <b>12</b> |                          |
| 1.    | Тема 1. Мощность множества. Счетные множества.                       | 5        | 16         | 4                        | -        | 4        | 8         |                          |
| 2.    | Тема 2. Мощность континуума. Сравнение мощностей                     | 5        | 8          | 2                        | -        | 2        | 4         |                          |
|       | <b><i>Раздел 2. Метрические пространства</i></b>                     | <b>5</b> | <b>24</b>  | <b>6</b>                 | <b>-</b> | <b>6</b> | <b>12</b> |                          |
| 3.    | Тема 3. Понятие метрического пространства                            | 5        | 16         | 4                        | -        | 4        | 8         |                          |
| 4.    | Тема 4. Полные метрические пространства                              | 5        | 8          | 2                        | -        | 2        | 4         |                          |
|       | <b><i>Раздел 3. Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега</i></b> | <b>5</b> | <b>24</b>  | <b>6</b>                 | <b>-</b> | <b>6</b> | <b>12</b> |                          |
| 6.    | Тема 5. Структура множеств на числовой прямой                        | 5        | 8          | 2                        | -        | 2        | 4         |                          |

|    |  |   |           |           |          |           |           |  |
|----|--|---|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|--|
| 7. | Тема 6. Мера Лебега<br>линейных множеств.<br>Интеграл Лебега | 5 | 16        | 4         | -        | 4         | 8         |  |
|    | <b>Промежуточная<br/>аттестация– зачет</b>                   |   |           |           |          |           |           |  |
|    | <b>Итого</b>   |   | <b>72</b> | <b>18</b> | <b>-</b> | <b>18</b> | <b>36</b> |  |

## 4.2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

### Лекции

#### *Раздел 1. Элементы теории множеств*

##### **Тема 1. Мощность множества. Счетные множества**

Понятие множества. Операции над множествами. Отображение множеств. Взаимно однозначное соответствие между множествами. Разбиение на классы. Эквивалентность множеств. Конечные и бесконечные множества. Понятие мощности множества. Счетные множества (определение и примеры). Характеристический признак счетности множества. Существование счетного подмножества бесконечного множества. Мощность подмножества счетного множества. Теоремы о мощности объединения разных множеств (конечного и счетного; не более чем счетной совокупности счетных множеств; конечного числа счетных множеств; счетной совокупности конечных множеств; счетной совокупности счетных множеств). Счётность множества рациональных чисел. Теоремы о мощности объединения бесконечного и не более чем счетного множеств; о мощности разности несчетного и не более чем счетного множеств.

##### **Тема 2. Мощность континуума. Сравнение мощностей**

Несчетность множества всех точек отрезка  $[0, 1]$ . Понятие мощности континуума. Теоремы о мощности объединения: конечного числа множеств мощности континуума; счетной совокупности множеств мощности континуума и их следствия. Сравнение мощностей. Аксиома выбора. Континуум-гипотеза. Теорема о мощности множества всех подмножеств данного множества. Теорема Кантора- Бернштейна и её следствия.

#### *Раздел 2. Метрические пространства*

##### **Тема 3. Понятие метрического пространства**

Определение и примеры метрических пространств. Окрестность точки в метрическом пространстве. Точки прикосновения, предельные точки, внутренние точки множества. Замыкание и внутренность множества. Открытые множества и их свойства. Замкнутые множества и их свойства. Сходящиеся последовательности точек в метрическом пространстве и их свойства.

##### **Тема 4. Полные метрические пространства**

Фундаментальная последовательность точек и её сходимости. Полные метрические пространства (определение и примеры - полнота пространств  $R^n$ ,  $l_2$ ,  $C[a,b]$ ). Теорема о вложенных шарах. Всюду плотные и нигде не плотные множества. Теорема Бэра. Пополнение пространства.

### ***Раздел 3. Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега***

#### **Тема 5. Структура множеств на числовой прямой**

Предельные, изолированные, точки прикосновения, внутренние точки множества точек на числовой прямой. Теорема о существовании предельной точки ограниченного множества точек на прямой. Понятие производного, совершенного множеств (определение и примеры). Канторово совершенное множество. Точная верхняя и точная нижняя грань множества. Теорема о существовании точной верхней (точной нижней) грани множества точек на прямой. Теорема о представлении открытого множества точек на прямой в виде объединения составляющих интервалов.

#### **Тема 6. Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

Мера открытого и замкнутого ограниченных множеств точек прямой и её простейшие свойства. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества точек на прямой и её свойства. Понятие измеримого множества на прямой. Класс измеримых множеств. Определение и простейшие свойства измеримых функций. Определение и основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

### **Практические занятия**

*Практические занятия проводятся в форме практикума: предполагается решение задач разного уровня сложности при опоре на определения и свойства основных понятий по теме.*

#### ***Раздел 1. Элементы теории множеств***

*Учебные цели:*

Сформировать систематизированные знания студентов по методам решения задач теории множеств, используя эвристические и логические рассуждения на основе определений фундаментальных понятий теории множеств и формулировок основных теорем о свойствах бесконечных множеств.

#### **Практическое занятие 1**

##### **Тема: Мощность множества. Счетные множества**

*Учебные цели:*

1. Повторить определения и свойства операций над множествами.
2. Решить типовые задачи на установление взаимно однозначного соответствия между некоторыми числовыми множествами.

*Основные термины и понятия:*

- множество,
- подмножество,
- объединение множеств,
- пересечение множеств,
- разность множеств, дополнение,
- взаимно однозначное соответствие.

## **Практическое занятие 2**

### **Тема: Мощность множества. Счетные множества**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности, включающие:
  - а) установление взаимно однозначного соответствия между заданными множествами;
  - б) определение мощности множества.

*Основные термины и понятия:*

- отображение множеств,
- биекция,
- взаимно однозначное соответствие,
- эквивалентные множества,
- мощность множества, счетные множества.

## **Практическое занятие 3**

### **Тема: Мощность континуума. Сравнение мощностей**

*Учебные цели:*

1. Решить типовые задачи и задачи повышенного уровня сложности на определение мощности заданных множеств.

*Основные термины и понятия:*

- равномощные множества,
- конечные и бесконечные множества,
- счетные и несчетные множества,
- мощность континуума.

## **Практическое занятие 3\* (дополнительное занятие, ЭИОС ГГТУ)**

### **Тема: Мощность континуума. Сравнение мощностей**

*Учебные цели:*

1. Выполнить все задания контрольной работы №1 на тему «Элементы теории множеств»

*Основные термины и понятия:*

- операции над множествами,
- мощность множества.

## **Раздел 2. Метрические пространства**

*Учебные цели:*

Сформировать систематизированные знания студентов по методам решения задач теории метрических пространств, используя эвристические и логические рассуждения на основе определений фундаментальных понятий теории метрических пространств.

## **Практическое занятие 1**

### **Тема: Понятие метрического пространства**

*Учебные цели:*

1. Повторить аксиомы метрики и определение метрического пространства.
2. Решить задачи разного уровня сложности на проверку аксиом метрики для множеств, элементами которых являются числа, функции, числовые последовательности.

*Основные термины и понятия:*

- метрика,
- аксиомы метрики,
- метрическое пространство.

## **Практическое занятие 2**

## **Тема: Понятие метрического пространства**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на исследование принадлежности некоторых функций и числовых последовательностей заданным метрическим пространствам.

*Основные термины и понятия:*

- непрерывные функции,
- точки разрыва,
- числовые последовательности,
- числовой ряд,
- сходящийся ряд.

## **Практическое занятие 3**

### **Тема: Полные метрические пространства**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи на применение определения и свойств открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве.
2. Решить задачи на исследование сходимости последовательностей в метрических пространствах.

*Основные термины и понятия:*

- окрестность, предельные точки,
- точки прикосновения,
- внутренние точки множества,
- внутренность и замыкание множества,
- последовательность точек и её предел,
- сходящаяся последовательность точек,
- фундаментальная последовательность точек.

## **Практическое занятие 3\* (дополнительное занятие, ЭИОС ГГТУ)**

### **Тема: Полные метрические пространства**

*Учебные цели:*

1. Выполнить все задания контрольной работы №2 на тему «Метрические пространства».

## **Раздел 3. Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега**

*Учебные цели*

Сформировать навыки использования определений и свойств фундаментальных понятий теории меры при решении задач на вычисление и доказательство по теории функций действительного переменного.

## **Практическое занятие 1**

### **Тема: Структура множеств на числовой прямой**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на исследование свойств числовых множеств на прямой.

*Основные термины и понятия:*

- предельные точки,



- замкнутые множества,
- внутренние точки,
- открытые множества,
- ограниченные множества,
- точная верхняя и точная нижняя грань множества.
- канторово совершенное множество.

### **Практическое занятие 2**

#### **Тема: Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи разного уровня сложности на применение определения и свойств меры множеств на прямой.

*Основные термины и понятия:*

- мера открытого и замкнутого ограниченных множеств,
- внешняя и внутренняя меры множества,
- мера Лебега на прямой,
- измеримые множества,
- счётности измеримость множества.

### **Практическое занятие 3**

#### **Тема: Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега**

*Учебные цели:*

1. Решить задачи на применение определения и свойств измеримых функций и вычисление интеграла Лебега.

*Основные термины и понятия:*

- измеримая функция,
- измеримость и непрерывность функции,
- верхняя и нижняя суммы Лебега,
- интеграл Лебега.

### **Практическое занятие 3\***

#### **Тема: Мера Лебега линейных множеств. Интеграл Лебега\***( дополнительное занятие, ЭИОС ГГТУ)

*Учебные цели:*

1. Выполнить все задания самостоятельной работы №1 (дополнительная работа) на тему «Мера и интеграл Лебега».

*Основные термины и понятия:*

- измеримые множества,
- измеримые функции,
- интеграл Римана,
- интеграл Лебега.

#### **5.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

*Перечень литературных источников для самостоятельной работы обучающихся :*

- 1.Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — ISBN 978-5-

Самостоятельная учебная работа студента определяется программой дисциплины, перечнем теоретических вопросов для текущего промежуточного и итогового контроля знаний. Этот вид учебной деятельности студента предусматривает:

- проработку теоретического материала (изучение теории);
- решение задач и выполнение домашних заданий по определенным темам;
- периодический устный или письменный отчет о выполненных заданиях;
- подготовку к коллоквиумам, контрольным и самостоятельным работам;
- самоконтроль и промежуточный контроль полученных знаний.

Систематичность и добросовестность студента при выполнении заданий для самостоятельной работы могут существенно повлиять на уровень знаний, умений и навыков, формируемых в рамках данной учебной дисциплины. Предполагается, что активная самостоятельная работа студента по данной дисциплине будет способствовать развитию познавательной самостоятельности и творческой активности студента, формированию достаточно высокого уровня его математической культуры.

Кроме того, эффективность и успешность самостоятельной работы студента при изучении данной дисциплины непосредственно связаны с постепенным формированием профессиональных знаний и умений студента - будущего учителя математики.

### **Зачетное задание 1 ( самостоятельная работа)**

#### ***Тема: Элементы теории множеств***

Задание 1. Пусть  $I = \{ \alpha \}$  – произвольное множество индексов. Доказать равенство:

а)  $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cup A = \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \cup A)$

б)  $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap A)$

Задание 2. Построить биективное отображение (биекцию):

- а) отрезка  $[0,1]$  на всю числовую прямую;
- б) луча  $[0,+\infty)$  на интервал  $(a,b)$ .

Задание 3. Установить, какова мощность:

- а) множества всех многочленов с рациональными коэффициентами;
- б) множества всех трансцендентных (т.е. не алгебраических) чисел;

Задание 4. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества  $E$  на прямой больше единицы, то множество  $E$  конечно или счетно.

Задание 5. На плоскости задано множество  $E$  такое, что расстояние между любыми двумя точками этого множества больше, чем  $a$  (где  $a$  - данное положительное число). Доказать, что множество  $E$  не более чем счётно (т.е. либо счётно, либо конечно).

Задание 6. Доказать, что если  $A \setminus B \sim B \setminus A$ , то  $A \sim B$ .

(указание: представьте множества  $A$  и  $B$  в виде объединения двух множеств).

Задание 7.

Выяснить, какова мощность множества:

- 1) всевозможных последовательностей рациональных чисел;
- 2) всех отрезков на числовой прямой;

- 3) всех кругов на плоскости;  
4) всех конечных и счетных подмножеств множества  $E$ , если  $E$  имеет мощность континуума.

**Рекомендации к выполнению:** Для успешного решения задач необходимо повторить теоретический материал, используя конспект лекций или учебник.

**Форма отчетности:** письменная работа.

## Зачетное задание 2 (самостоятельная работа)

**Тема: Метрические пространства**

### Задание 1.

На множестве  $\mathbb{R}^2$  заданы метрики:  $\rho(x,y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\}^{0.5}$ ,  $\sigma(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ , где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  - точки из  $\mathbb{R}^2$ . Установить, что представляют собой замкнутые шары в метрических пространствах  $(\mathbb{R}^2, \rho)$ ,  $(\mathbb{R}^2, \sigma)$  и изобразить их на рисунке.

### Задание 2.

Найти расстояние между функциями:

- а)  $x(t) = \sin 2t$  и  $y(t) = \cos 2t$  в пространстве  $C[0, \pi]$ ;  
б)  $x(t) = t^4 + 4t + 1,4$  и  $y(t) = 2t^3 + 3t^2$  в пространстве  $C[-1, 1]$ ;

### Задание 3.

Найти замыкание множества:

- а) всех точек вида  $\frac{p^2}{q^2}$ , где  $p$  и  $q$  - всевозможные целые числа, причем  $q \neq 0$ ;  
б) всех точек вида  $2^{\frac{p}{q}}$ , где  $p$  и  $q$  - всевозможные натуральные числа.

### Задание 4.

- а). Доказать, что внутренность любого множества в метрическом пространстве есть открытое множество.  
б). Доказать, что производное множество (т.е. множество всех предельных точек) любого множества в метрическом пространстве есть замкнутое множество.  
в). Доказать, что множество всех точек  $(x,y)$  с рациональными координатами всюду плотно на плоскости.

**Рекомендации к выполнению:** Для успешного решения задач необходимо повторить теоретический материал, используя конспект лекций или учебник.

**Форма отчетности:** письменная работа.

**6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации приведен в приложении

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины( модуля)**

### **7.1. Основная литература:**

1. Власова, Е. А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212189>
2. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210809>

### **7.2. Дополнительная литература:**

1. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8999-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/491235>
2. Лелявин С.Н. Задачи по действительному и функциональному анализу : учебное пособие / Лелявин С.Н. — Москва :Русайнс, 2020. — 172 с. — ISBN 978-5-4365-6311-4. — URL: <https://book.ru/book/938745>
3. Смолин, Ю. Н. Введение в теорию функций действительной переменной : учебное пособие / Ю. Н. Смолин. — 2-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2017. — 518 с. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=364595>
4. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-1822-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168826>

## **8. Перечень современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем**

Все обучающихся университета обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, которые подлежат обновлению при необходимости, что отражается в листах актуализации рабочих программ.

### **Современные профессиональные базы данных:**

1. Министерство образования и науки Российской Федерации <http://mon.gov.ru>
2. Федеральный портал «Российское образование» <http://www.edu.ru>
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам <http://window.edu.ru>
4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов <http://fcior.edu.ru>

5. Министерство образования Московской области <http://mo.mosreg.ru>
6. Интернет-экзамен в сфере профессионального образования (ФЭПО) <http://www.fepo.ru>
7. Каталог электронных образовательных ресурсов Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) <http://eor.edu.ru>
8. Портал Федерального института педагогических измерений <http://www.fipi.ru>
9. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://edu-top.ru/katalog/>
10. Образовательные ресурсы Интернета "Всем, кто учится" <http://www.alleng.ru>
11. Электронная информационно-образовательная среда Университета <http://dis.ggtu.ru/>
12. «Университетская библиотека online» <http://biblioclub.ru/>
13. Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
14. Электронно-библиотечная система «Юрайт» [www.biblio-online.ru](http://www.biblio-online.ru)
15. Электронная библиотека диссертаций <http://diss.rsl.ru/>

#### **Информационные справочные системы:**

1. информационно-поисковые системы [www.google.ru/](http://www.google.ru/), [www.yandex.ru/](http://www.yandex.ru/)
2. Прикладная математика: Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями: <http://www.pm298.ru>

#### **9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**


Для осуществления образовательного процесса по дисциплине имеется в наличии следующая материально-техническая база:

| Аудитории   | Программное обеспечение  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- учебная аудитория для проведения учебных занятий по дисциплине, оснащенная компьютером с выходом в интернет, мультимедиа проектором;</li> <li>- помещение для самостоятельной работы обучающихся, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-</li> </ul> | <p>Операционная система<br/>           Пакет офисных приложений<br/>           Браузер Firefox, Яндекс</p> |

|   |  |
|---|--|
| образовательную среду ГГТУ;<br>- специализированная аудитория для проведения лабораторных работ по дисциплине, оснащенная набором реактивов и лабораторного оборудования; |  |
|---|--|

#### 10. Обучение инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.

При необходимости рабочая программа дисциплины может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

Автор (составитель):  к.ф.-м.н., доцент Панчишина В.А.

Программа одобрена на заседании кафедры математики и экономики 20.05.2022г., протокол №8.

Зав. кафедрой  Каменских Н.А.

**Министерство образования Московской области  
Государственное образовательное учреждение высшего образования  
Московской области  
«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ,  
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Б1.О.07.05**

**Теория функций действительного переменного**

|   |   |
|---|---|
| <b>Направление подготовки</b>             | <b>44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)</b> |
| <b>Направленность (профиль) программы</b> | <b>«Математика».<br/>«Информатика»</b>                                    |
| <b>Квалификация выпускника</b>            | <b>Бакалавр</b>   |
| <b>Форма обучения</b>                     | <b>Очная</b>  |

**Орехово-Зуево  
2022г.**

## 1.1. Индикаторы достижения компетенций

| Код и наименование универсальной компетенции  | Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции  |
|---|---|
| <b>УК-1.</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | <b>УК-1.1.</b> Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.<br><b>УК-1.2.</b> Применяет логические формы и процедуры , способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.<br><b>УК-1.3.</b> Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений |

| Код и наименование профессиональной компетенции  | Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции  |
|--|--|
| <b>ПК-1.</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач | <b>ПК-1.1.</b> Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).<br><b>ПК-1.2.</b> Умеет осуществлять отбор содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.<br><b>ПК-1.3.</b> Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий , применять методы, приемы и технологии обучения , в том числе информационные. |

## 1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.

Оценка уровня освоения компетенций на разных этапах их формирования проводится на основе дифференцированного контроля каждого показателя компетенции в рамках оценочных средств , приведенных в ФОС.



Оценка «отлично», «хорошо», «зачтено» соответствует **повышенному** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «удовлетворительно», «зачтено» соответствует **базовому** уровню освоения компетенции согласно критериям оценивания, приведенных в таблице к соответствующему оценочному средству.

Оценка «неудовлетворительно», «не зачтено» соответствует показателю «**компетенция не освоена**».

| № п/п  | Наименование оценочного средства  | Краткая характеристика оценочного средства  | Представление оценочного средства в фонде | Критерии оценивания   |
|--|---|---|---|---|
| <i>Оценочные средства для проведения текущего контроля</i> |   |   |   |   |
| 1  | <b><i>Самостоятельная работа</i></b><br><br>(показатель компетенции «Умение») | Контрольное мероприятие, цель которого состоит в промежуточном контроле знаний по теме. | Комплект заданий                          | <p>- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если правильно выполнены все задания ;</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если представлено решение всех задач, включенных в работу; при этом: а) при верном ходе рассуждений решение отдельных задач содержит вычислительные ошибки, приведшие к неверному ответу; б) правильное решение одной-двух задач не доведено до конца;</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту, если правильно выполнено примерно 30% всех заданий.</p> |

|   |  |  |                           |  |
|---|--|--|---------------------------|--|
|   |  |  |                           | <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если решение не отвечает ни одному из требований, указанных выше.</p>   |
| 2 | <p><b>Контрольная работа</b><br/>(показатель компетенции «Владение»)</p> | <p>Контрольное мероприятие, цель которого состоит в выявлении уровня знаний, умений и навыков, сформированных при изучении определенной темы данной дисциплины</p> | <p>Комплект заданий .</p> | <p>- оценка «5» (отлично) выставляется студенту, если правильно выполнены все задания (обоснованно получен правильный ответ), либо допущены незначительные погрешности (решение задачи в целом верное, только на последнем этапе допущены вычислительные ошибки);</p> <p>- оценка «4» (хорошо) выставляется студенту, если представлено решение всех задач, включенных в работу; при этом: а) при верном ходе рассуждений решение отдельных задач содержит вычислительные ошибки, приведшие к неверному ответу; б) правильное решение одной - двух задач не доведено до конца (представлено примерно 80% решения задачи);</p> <p>- оценка «3» (удовлетворительно) выставляется студенту,</p> |

|   |  |   |  |  |
|---|--|---|--|--|
|   |  |   |  | <p>если правильно выполнено примерно 30% всех заданий .</p> <p>- оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется студенту, если решение не отвечает ни одному из требований , указанных выше.</p>  |
| <i>Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации</i> |  |   |  |  |
| 3   | <p><b>Зачет</b></p> <p>(показатель компетенции «Знание», «Умение»)</p> | <p>Контрольное мероприятие, которое проводится по окончании изучения дисциплины в виде индивидуальной контрольной работы, содержащей теоретические вопросы и ( или) задачи.</p> | <p>Вопросы к зачету, отдельные задания из самостоятельных и контрольных работ.</p> | <p>оценка «зачтено» выставляется студенту, если:</p> <p>а) правильно выполнены все задания;</p> <p>б) правильно выполнено 60 % всех заданий и дан правильный ответ на один - два дополнительных вопроса;</p> <p>в) правильно выполнено 40 % всех заданий и дан правильный ответ на дополнительные вопросы;</p> <p>- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если ответ не соответствует ни одному из требований , указанных выше.</p> |

**1.3. Типовые контрольные задания и/ или иные материалы для проведения текущего контроля, промежуточной аттестации, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и / или опыта деятельности , характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.**

### **Текущий контроль**

В случае применения в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий используется <https://dis.ggtu.ru/course/view.php?id=6078>

*Комплект заданий для контрольной работы*

### **Контрольная работа №1**

**Тема: Элементы теории множеств**

#### **Вариант 1**

1. Верны ли равенства:

а)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ ;

б)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ ;

Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

2. Установить взаимно однозначное соответствие между

точками открытого квадрата  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  и точками открытого прямоугольника  $(a;b) \times (c;d)$ .

3. Установить мощность множества всех интервалов  $(a,b)$  с рациональными концами.

4. Выяснить, какова мощность множества функций, непрерывных на отрезке  $[0,1]$ .

#### **Вариант 2**

1. Верны ли равенства:

а)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ;

б)  $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ ;

Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

2. Установить взаимно однозначное соответствие между

точками открытого квадрата  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  и точками плоскости.

3. Установить мощность множества всех многочленов с целыми коэффициентами.

4. Выяснить, какова мощность множества функций, имеющих не более чем счетное число точек разрыва на отрезке  $[0,1]$ .

#### **Вариант 3**

1. Верны ли равенства:

а)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ;

б)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = ((A \setminus C) \cup (C \setminus A)) \cup ((B \setminus C) \cup (C \setminus B))$ ;

Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

2. Найти взаимно однозначное соответствие между отрезком  $[a,b]$  и замкнутым лучом  $[0,+\infty]$ .

3. Установить мощность множества точек из  $R^n$ , все координаты которых рациональны.

4. Выяснить, какова мощность множества сходящихся последовательностей действительных чисел.

#### Вариант 4

1. Верны ли равенства:

а)  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ ;

б)  $A \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ .

Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

2. Найти взаимно однозначное соответствие между замкнутым лучом  $[0, +\infty]$  и интервалом  $(a, b)$ , где  $a, b$  – вещественные числа.

3. Установить мощность множества, состоящего из непересекающихся шаров в  $R^n$ .

4. Выяснить, какова мощность множества кусочно-линейных непрерывных функций на отрезке  $[0, 1]$ .

#### Контрольная работа №2

##### Тема: Метрические пространства

#### Вариант 1

1. Проверить, определяет ли функция  $f(x, y)$  метрику на множестве  $R^n$ :

$$f(x, y) = \max |x_k - y_k|, 1 \leq k \leq n$$

2. Выяснить, принадлежит ли функция  $x(t)$  пространствам  $C[a, b]$ ,  $C[c, d]$ , если  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $[c, d] = [-1, 1]$

$$x(t) = \begin{cases} t \ln t, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ \frac{t}{\ln(t^2 + 1)}, & t < 0 \end{cases}.$$

3. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность  $x$  пространству  $l_1$ , если

$$x = \left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

4. Даны функции  $x(t)$  и  $y(t)$ . Выяснить, принадлежит ли точка  $y(t)$  замкнутому шару с центром в точке  $x(t)$  радиуса  $r$  из пространства  $C[a, b]$ , если

$$x(t) = \operatorname{tg}^2 t, \quad y(t) = 2 \cdot \operatorname{tg} t, \quad r = 3, \quad [a, b] = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

5. Установить, сходятся ли к функции  $x(t)$  последовательность функций  $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$  в пространстве  $C[a, b]$ , если

$$x_n(t) = te^{-nt}, \quad x(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1].$$

#### Вариант 2

1. Проверить, определяет ли функция  $f(x, y)$  метрику на множестве  $R$ :

$$f(x, y) = |x^3 - y^3|,$$

2. Выяснить, принадлежит ли функция  $x(t)$  пространствам  $C[a,b]$ ,  $C[c,d]$

если  $[a,b] = [0,3]$ ,  $[c,d] = [-2,2]$

$$x(t) = \begin{cases} t \ln t, & t > 0 \\ 1, & t = 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} t}{t}, & t < 0 \end{cases}$$

3. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность  $x$  пространству  $l_1$ , если

$$x = \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

4. Даны функции  $x(t)$  и  $y(t)$ . Выяснить, принадлежит ли точка  $y(t)$  замкнутому шару с центром в точке  $x(t)$  радиуса  $r$  из пространства  $C[a,b]$ , если

$$x(t) = \frac{8}{t-2} + 2t + 5, \quad y(t) = t^2/2, \quad r = 2, \quad [a,b] = [-1; 1/2]$$

5. Установить, сходится ли к функции  $x(t)$  последовательность функций  $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$  в пространстве  $C[a,b]$ , если

$$x_n(t) = \ln \sqrt{n} e^{-nt}, \quad x(t) = 0, \quad [a,b] = [0,2].$$

*Комплект заданий для самостоятельной работы*

### **Самостоятельная работа №1 (дополнительная работа)**

**Тема: Элементы теории меры Лебега. Интеграл Лебега.**

#### **Вариант 1.**

1. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для иррациональных, больших чем } \frac{1}{3} \\ x^3 & \text{для иррациональных, меньших чем } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{в рациональных точках} \end{cases}$$

2. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{K} \\ 2, & \text{если } x \notin \mathbb{K} \end{cases}$$

3. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0,1]$  от функции  $f(x)$ , если функция  $f(x)$  равна  $x^2$  в точках канторова множества  $\mathbb{K}$  и равна  $\frac{1}{2^n}$  на тех смежных интервалах, длина которых равна  $\frac{1}{3^n}$ .

## Вариант 2.

1. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0, 1]$  от функции  $f(x)$ , если:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{для иррациональных } x \text{ из } [0, 1] \\ x^3 & \text{для рациональных } x \text{ из } [0, 1] \end{cases},$$

2. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0, 1]$  от функции  $f(x)$ , если:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } x \in \mathbb{K} \\ 3, & \text{если } x \notin \mathbb{K} \end{cases}$$

3. Вычислить интеграл Лебега по отрезку  $[0, 1]$  от функции  $f(x)$ , если функция  $f(x)$  равна  $x^4$  в точках канторова множества  $\mathbb{K}$  и равна  $\frac{1}{2^n}$  на тех смежных интервалах, длина которых равна  $\frac{1}{3^n}$ .

## Промежуточная аттестация

В случае применения в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий используется <https://dis.ggtu.ru/course/view.php?id=6078>

## Вопросы для подготовки к зачету

### Часть 1

1. Множество, операции над множествами, свойства операций над множествами.
2. Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетные множества (определение и примеры).
3. Характеристический признак счетности множества.
4. Теорема о существовании счетного подмножества бесконечного множества.
5. Теорема о мощности подмножества счетного множества.
6. Теоремы о мощности объединения разных множеств (конечного и счетного, не более чем счетной совокупности счетных множеств, конечного числа счетных множеств, счетной совокупности конечных, счетной совокупности счетных)
7. Теорема о счетности множества всех рациональных чисел.
8. Теорема о мощности объединения бесконечного и не более чем счетного множеств.
9. Теорема о мощности разности несчетного и не более чем счетного множеств.
10. Теорема о несчетности множества всех точек отрезка  $[0, 1]$ .
11. Теорема о мощности множества  $[a, b]$ .
12. Теоремы о мощности объединения разных множеств мощности континуума (конечного числа, счетной совокупности) и их следствия.
13. Теорема о мощности множества всех подмножеств данного множества.

## **Часть 2**

14. Определение и примеры метрических пространств.
15. Открытый и замкнутый шары в метрическом пространстве (определение и примеры).
16. Точка прикосновения множества в метрическом пространстве (определение и примеры).
17. Замыкание множества и его свойства.
18. Предельная точка множества. Теорема о существовании бесконечного множества точек данного множества в окрестности его предельной точки.
19. Внутренняя точка множества, открытые множества (определение и примеры).
20. Теорема о том, что открытый шар является открытым множеством.
21. Теорема об объединении любой совокупности открытых множеств.
22. Теорема о пересечении конечной совокупности открытых множеств.
23. Замкнутые множества и их свойства.
24. Всюду плотное и нигде не плотное множество (определение и примеры).
25. Сходящаяся последовательность точек и её свойства.
26. Фундаментальная последовательность точек и её сходимости.
27. Определение и примеры полных метрических пространств.
28. Теорема о вложенных шарах.
29. Теорема Бэра.

## **Часть 3**

30. Предельные, изолированные, точки прикосновения, внутренние точки множества точек на прямой.
31. Теорема о существовании предельной точки ограниченного множества точек на прямой.
32. Понятие производного, совершенного множества (определение и примеры).
33. Точная верхняя и точная нижняя грань множества.
34. Теорема о существовании точной верхней (точной нижней) грани множества точек на прямой.
35. Теорема о представлении открытого множества точек на прямой в виде объединения составляющих интервалов.
36. Мера открытого ограниченного множества точек на прямой и её простейшие свойства. Примеры.
37. Мера ограниченного замкнутого множества точек на прямой.
38. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества точек на прямой.
39. Теорема о сравнении внешней и внутренней меры множества.
40. Измеримые множества и их свойства
41. Измеримые функции и их свойства.
42. Интеграл Лебега и его свойства.



**Схема соответствия типовых контрольных заданий и оцениваемых знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций:**

| № | Код и наименование компетенции   | Наименование индикатора достижения компетенции | Типовое контрольное задание                                      |
|---|--|--|--|
| 1 | <b>УК-1.</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач                | УК-1.1   | Вопросы к зачету<br>Самостоятельная работа<br>Контрольная работа |
| 2 |  | УК-1.2   |  |
| 3 |  | УК-1.3   |  |
| 1 | <b>ПК-1.</b> Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач | ПК-1.1   | Вопросы к зачету<br>Самостоятельная работа<br>Контрольная работа |
| 2 |  | ПК-1.2   |  |
| 3 |  | ПК-1.3   |  |